Bokmål

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2007–2008

Finale 6. mars 2008

Abelkonkurransens finale består av 4 oppgaver (8 punkter) som skal løses i løpet av 4 timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. Begynn på nytt ark for hver oppgave.

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Det gir en poengsum mellom 0 og 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

Oppgave 1

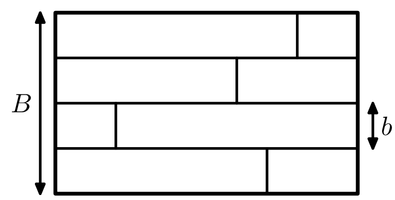
La $s(n) = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$.

(a) Vis at $s(n)$ er et heltall når n er et heltall.

(b) Hvor mange heltall n, med $0 < n \leq 2008$, er slik at $s(n)$ er delelig med 4?

Oppgave 2

(a) Vi skal legge planker på et golv som har bredde B i den retningen som er på tvers av plankene. Vi har n planker av bredde b, og B/b er et helt tall, og $nb \leq B$. Det er nok planker til å dekke golvet, men plankene kan ha forskjellige lengder. Vis at vi kan sage plankene på en slik måte at hver plankelengde på golvet høyst får én skjøt.



(b) A og B spiller et spill på et kvadratisk brett som består av $n \times n$ hvite kvadrater, der $n \geq 2$. A starter spillet, og spillerne trekker deretter annenhver gang. Et trekk går ut på å velge et kvadrat som består av 2×2 eller 3×3 hvite ruter og fargelegge alle disse rutene svarte. Den første spilleren som ikke kan finne noen slike hvite kvadrater, har tapt. Vis at A alltid kan vinne hvis A spiller riktig.

Oppgave 3

(a) La x og y være positive tall som er slik at $x + y = 2$. Vis at

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}.$$

(b) La x, y og z være positive tall som er slik at $x + y + z = 2$. Vis at

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{9}{4} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}.$$

Oppgave 4

Merk at deloppgavene (a) og (b) ikke har noe med hverandre å gjøre, og at trekantene i disse oppgavene derfor ikke er de samme.

(a) Tre forskjellige punkter A, B og C ligger på en sirkel med sentrum i O. Trekantene AOB, BOC og COA har samme areal. Hva er de mulige vinkelstørrelsene i trekanten ABC?

(b) Punktet D ligger på sida BC og punktet E på sida AC i trekanten ABC, og BD og AE er like lange. Linja som går gjennom sentrene i de omskrevne sirklene til trekantene ADC og BEC, går gjennom AC i K og gjennom BC i L. Vis at KC og LC er like lange.