Nynorsk

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2007–2008

Finale 6. mars 2008

I finalen i Abelkonkurransen er det 4 oppgåver (8 punkt) som skal løysast på 4 timar. Svara skal grunngjevast og førast på eigne ark. Begynn på nytt ark for kvar oppgåve.

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Det gir ein poengsum mellom 0 og 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir, skrivereiskapar og tospråklege ordbøker er tillatne.

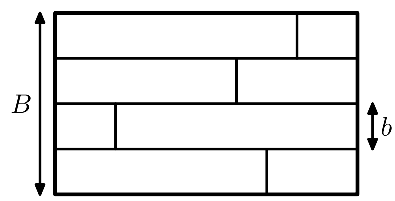
Oppgåve 1

La $s(n) = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$.

(a) Vis at $s(n)$ er eit heiltal når n er eit heiltal.

(b) Kor mange heiltal n, med $0 < n \leq 2008$, er slik at $s(n)$ er deleleg med 4?

Oppgåve 2



(a) Vi skal leggje plankar på eit golv som har breidda B i den retninga som er på tvers av plankane. Vi har n plankar med breidd b, og B/b er eit heilt tal, og $nb \leq B$. Det er nok plankar til å dekkje golvet, men plankane kan ha ulike lengder. Vis at vi kan sage plankane på ein slik måte at kvar plankelengd på golvet høgst får éin skøyt.

(b) A og B speler eit spel på eit kvadratisk brett som består av $n \times n$ kvite kvadrat, der $n \geq 2$. A startar spelet, og spelarane trekkjer deretter annankvar gong. Eit trekk går ut på å velje eit kvadrat som består av 2×2 eller 3×3 kvite ruter og fargeleggje alle desse rutene svarte. Den første spelaren som ikkje kan finne nokon slike kvite kvadrat, har tapt. Vis at A alltid kan vinne dersom A speler rett.

Oppgåve 3

(a) La x og y vere positive tal som er slik at $x + y = 2$. Vis at

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}.$$

(b) La x, y og z vere positive tal som er slik at $x + y + z = 2$. Vis at

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{9}{4} \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}.$$

Oppgåve 4

Merk at deloppgåvene (a) og (b) ikkje har noko med kvarandre å gjere, og at trekantane i desse oppgåvene derfor ikkje er dei same.

(a) Tre ulike punkt A, B og C ligg på ein sirkel med sentrum i O. Trekantane AOB, BOC og COA har same areal. Kva er dei moglege vinkelstorleikane i trekanten ABC?

(b) Punktet D ligg på sida BC og punktet E på sida AC i trekanten ABC, og BD og AE er like lange. Linja som går gjennom sentra i dei omskrivne sirklane til trekantane ADC og BEC, går gjennom AC i K og gjennom BC i L. Vis at KC og LC er like lange.