Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2007–2008. *Løsninger*

Finale 6. mars 2008

Oppgave 1

(a) $s(n) = \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n = \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n = \frac{1}{6}t(n)$. Fordi annethvert heltall er delelig med 2 og tredjehvert heltall er delelig med 3, er $t(n)$ delelig både med 2 og med 3. Fordi 2 og 3 ikke har noen felles primfaktorer, er $t(n)$ delelig med $2 \cdot 3 = 6$, og $s(n)$ er et heltall.

(b) $s(n)$ er delelig med 4 hvis og bare hvis $t(n)$ er delelig med 8. Dette er tilfelle for alle partall n, for da er ett av tallene $n-2$ og n delelig med 4 (annethvert partall er delelig med 4) og det andre delelig med 2. Det fins 1004 partall i det aktuelle området.

Hvis n er oddetall, må $n-1$ være delelig med 8. Dette er tilfelle for $2008/8 = 251$ oddetall i det aktuelle området. Til sammen er det $1004+251 = 1255$ tall n som er slik at $0 < n \leq 2008$ og $s(n)$ er delelig med 4.

Oppgave 2

(a) Først kapper vi om nødvendig noen planker, slik at vi får nøyaktig B/b planker. Start nå med den korteste planken. Hvis den er lengre enn golvets lengde (målt i samme retning som plankene skal gå på golvet), er problemet løst. I motsatt fall, kapp av en bit av den lengste, slik at den korteste planken og avkappet danner en lengde. (Det fins en planke som er lengre enn gulvet, og dermed lang nok til å få et avkapp av passende lengde, fordi vi har nok plank – det ville vi ikke ha hatt hvis alle var kortere.) Spar på resten av planken som det ble kappet fra. Legg første plankelengde, som høyst har én skjøt.

Nå har vi fremdeles nok planker, og antall gjenværende planker multiplisert med bredden av plankene er fremdeles lik bredden av den delen av gulvet der plank ikke er lagt på. Vi kan derfor gjenta prosedyren flere ganger. Til slutt har vi igjen én planke, og det er én plankebredde på golvet der plank ikke er lagt. Ved samme argumentasjon som tidligere er den gjenværende planken lang nok.

(b) A fargelegger det midterste 2×2-kvadratet hvis n er et partall og det midterste 3×3-kvadratet hvis n er et oddetall. Deretter gjentar A hvert trekk B gjør, men fargelegger symmetrisk om det midterste fargelagte kvadratet (hvis B fargelegger rute (k, l), der k er radnummer og l kolonnenummer, så fargelegger A rute $(n+1-k, n+1-l)$). Da er A sikret alltid å kunne gjøre et trekk etter at B har gjort det, og spillet slutter når det ikke er igjen noe 2×2-kvadrat som B kan fargelegge.

Oppgave 3

(a) Vi skal vise at $1/x + 1/(2-x) \le 1/x^2 + 1/(2-x)^2$ for alle x som er slik at $0 < x < 2$. Ved å multiplisere ulikheten med $x^2(2-x)^2$, multiplisere ut og samle leddene, får vi den ekvivalente ulikheten $4x^2 - 8x + 4 \ge 0$, eller $(x-1)^2 \ge 0$, som er sann.

(b) Hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er to vektorer, er skalarproduktet mellom dem $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$, der θ er vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Dermed er $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ (Cauchy–Schwartz' ulikhet). Setter vi

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) \quad \text{og} \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

blir ulikheten, etter at vi har kvadrert begge sidene,

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \ge \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 = \frac{1}{3}s^2.$$

Nå er det tilstrekkelig å vise at $s^2/3 \ge s + 9/4$. Denne ulikheten kan omformes til den ekvivalente ulikheten $(s - 9/2)(s + 3/2) \ge 0$, som er sann, da $s \ge 9/2$.

At $s \ge 9/2$, følger av at den harmoniske middelverdien er mindre enn eller lik den aritmetiske middelverdien – eller det kan vises direkte ved at $2s = (x+y+z)(1/x+1/y+1/z) = 3+(x/y+y/x)+(x/z+z/x)+(y/z+z/y) \ge 3+2+2+2 = 9$.

Og at $x/y + y/x \ge 2$ følger av at ulikheten er ekvivalent med $x^2 + y^2 \ge 2xy$, altså $(x-y)^2 \ge 0$.

Alternativ løsning: Vi viser først at

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \ge -\frac{9}{2}x + \frac{15}{4}$$

for alle $x > 0$. Ulikheten er ekvivalent med

$$0 \le \frac{9}{2}x^3 - \frac{15}{4}x^2 - x + 1 = \frac{9}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2\left(x + \frac{1}{2}\right),$$

som er sann for alle $x > 0$. Dermed er

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} \ge -\frac{9}{2}(x+y+x) + 3 \cdot \frac{15}{4} = -\frac{9}{2} \cdot 2 + 3 \cdot \frac{15}{4} = \frac{9}{4},$$

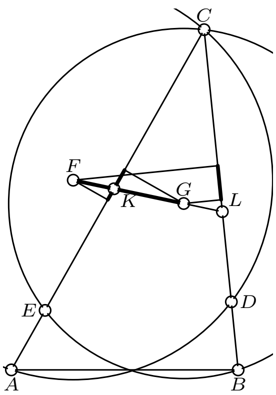
og vi har vist ulikheten i oppgaven.

Oppgave 4

(a) Trekanten ABC kan være spissvinklet eller ha en butt vinkel. (Hvis den er rettvinklet, vil hypotenusen gå gjennom O, slik at den ene av trekantene med O som et av hjørnene har areal null, mens de to andre trekantene er ikke-degenererte.)

Hvis den er spissvinklet, ligger O inne i trekanten. For at trekantene AOB og BOC skal ha samme areal, må sinus av vinklene AOB og BOC være like, det vil si at vinklene er like store eller at summen er $180°$. Det siste kan ikke være tilfelle, for da får trekanten AOC areal 0. Altså er de to vinklene like store, og ved samme argumentasjon er også vinkelen AOC like stor som disse to. Dermed er trekanten ABC likesidet, og alle vinklene i denne trekanten er $60°$.

Hvis trekanten ABC har en butt vinkel, for eksempel B, ligger O utenfor trekanten, og vinkelen $\gamma = AOC$ er summen av vinklene $\alpha = AOB$ og $\beta = BOC$, som heller ikke nå kan være $180°$. Dermed er $\alpha = \beta$ og $\gamma = \alpha + \beta = 2\alpha$. Da trekantene AOB og AOC har samme areal og $\gamma \neq \alpha$, er $3\alpha = \alpha + \gamma = 180°$. Så $\alpha = 60°$, og de to trekantene AOB og BOC er likesidete, noe som gjør at vinkelen ABC er $120°$, og de to andre vinklene i den likebeinte trekanten ABC er $30°$.



(b) Figuren viser trekanten ABC, punktene D og E, de omtalte omskrevne sirklene med sentre F og G, og skjæringspunktene K og L.

Trekk normaler fra F og G på siden AC. Fotpunktet til normalen fra F ligger midt på AC, og fotpunktet til normalen fra G ligger midt på EC. Det følger at avstanden mellom de to fotpunktene er $\frac{1}{2}|AE|$. Sagt på en annen måte: Projeksjonen av FG på AC har lengde $\frac{1}{2}|AE|$.

Tilsvarende har projeksjonen av FG på BC lengde $\frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}|AE|$.

De to projeksjonene av FG på de to sidene AC og BC er altså like lange, så de to vinklene CKL og CLK er like store. Dermed er trekanten CKL likebeint, som skulle vises.