Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2007–2008. *Løsninger*

Første runde 1. november 2007

Oppgave 1. $1997 \cdot 2003 - 1993 \cdot 2007 = (2000-3)(2000+3) - (2000-7) \cdot (2000+7) = 2000^2 - 3^2 - 2000^2 + 7^2 = 40.$ .... **C**

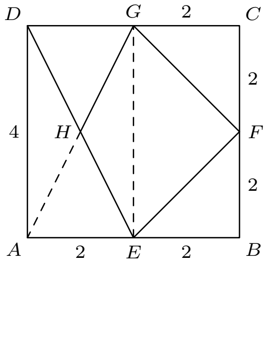
Oppgave 2. Fordi det blir 4 til overs når de deles i grupper på 5, er det 4, 9, 14, 19, 24 eller 29 barn. Av disse mulighetene er det bare 19 som gir 3 til overs når barna deles i grupper på 4. Når de 19 deles i grupper på 6, blir det 1 til overs. .... **A**

Oppgave 3. Hvis Ola spiste et odde antall epler mandag og fredag, spiste han et jamt antall tirsdag og torsdag og et odde antall onsdag, altså et odde antall totalt. Så han spiste et jamt antall mandag og fredag. Spiste han 2 mandag og fredag, kom han ikke opp i 18 på ei uke, og spiste han 6 eller flere mandag og fredag, spiste han flere enn 18. Så han spiste 4 epler mandag og fredag, og dermed 3 eller 5 tirsdag. Spiste han 5 tirsdag, spiste han minst 20 (4–5–4–3–4), så han spiste 3 tirsdag (4–3–4–3–4). .... **B**

Oppgave 4. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}} = ((x^{1/2})^{1/2})^{1/2} = x^{(1/2)(1/2)(1/2)} = x^{1/8} = \sqrt[8]{x}.$ .... **C**

Oppgave 5. Ved å faktorisere nevnerne $20 = 4 \cdot 5$, $21 = 3 \cdot 7$, $22 = 2 \cdot 11$ og $24 = 4 \cdot 6$, ser vi at teller er delelig på disse. Nevneren 23, derimot, er et primtall som ikke forekommer som primfaktor i teller. .... **D**

Oppgave 6. Det er 9 muligheter (1–9) for første og 10 muligheter (0–9) for andre siffer i et tosifret tall. Av disse 90 tallene er det 5 muligheter for odde førstesiffer og 5 muligheter for odde andresiffer, altså 25 tall der begge sifrene er odde. Antallet der minst ett siffer er jamt, er $90 - 25 = 65$. .... **D**

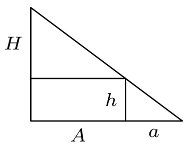


Oppgave 7. Vi skal addere lengdene av DE, EF, FG og GH. Ved Pytagoras' setning har DE lengde $\sqrt{2^2+4^2} = 2\sqrt{5}$ og EF lengde $\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$. FG har samme lengde som EF, og GH er halvparten så lang som DE (diagonalene AG og DE i rektanglet $AEGD$ skjærer hverandre i H). Den totale lengden er $2\sqrt{5} + 2 \cdot 2\sqrt{2} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$. .... **D**

Oppgave 8. Hvis Kari kjøpte b porsjoner burritos, må det kaffen kostet, $1000 - 172b$, være delelig med 20. Dermed må også $172b$ være delelig med 20, som gjør at b må være delelig med 5. Eneste mulighet er $b = 5$ ($b \geq 10$ gir totalpris større enn 1000). Kari kjøpte $(1000 - 172 \cdot 5)/20 = 7$ kopper kaffe. **E**

Oppgave 9. Omkretsen av det store rektanglet består av halvparten av omkretsene av de fire grå rektanglene, og har altså lengde $(6+11+12+13)/2 = 21$. . . . . **A**

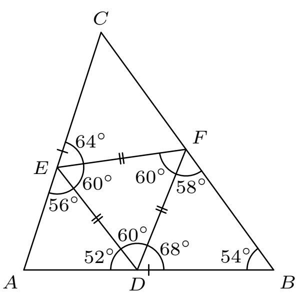
Oppgave 10. Vi kan anta at $x < y < z < t$. Da er $xy < xz < xt < yt < zt$, så det er minst 5 forskjellige produkt. Men det er bare 5 forskjellige produkt av to av tallene 1, 2, 3 og 6 (fordi $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$). Så vi kan bare være sikre på at det er 5 forskjellige produkt. . . . . **D**



Oppgave 11. Hvis Alf har høyde h, lykta er plassert H høyere og Alf står i avstand A fra lykta, så har skyggen lengde $a = (h/H)A$ (formlike trekanter). Hvis A tredobles, så tredobles også a. . . . . **D**

Oppgave 12. Når Cecilie har løpt 100 m, har Arne løpt 96 m og Beate 98 m. De er altså alle 4 m fra målstreken. Cecilie løper de siste 4 metrene fortest, Beate nest fortest og Arne saktest. . . . . **B**

Oppgave 13. La R være radien i den største og r radien i den minste sirkelen. Da er $\pi = \pi R^2 - \pi r^2$, slik at $1 = R^2 - r^2 = (R+r)(R-r)$. Innsetting av $R + r = 2$ gir $1 = 2(R - r)$, og innsetting av $r = 2 - R$ gir $1 = 2(R - 2 + R)$, og $R = 5/4$. . . . . **B**



Oppgave 14. Vinklene i trekanten DEF er alle 60°. Vinkelen AED er dermed $180° - 64° - 60° = 56°$. Summen av vinklene A, B og C er lik summen av vinklene A, EDA og AED (180°), og vinklene B og C er like, slik at vinkelen B er $(52° + 56°)/2 = 54°$. Vinkelen BDF er $180° - 60° - 52° = 68°$. Dermed er vinkelen BFD $180° - 54° - 68° = 58°$. . . . . **B**

Oppgave 15. Det er én type terning som er helt svart, og én helt hvit. Det er også bare én type terning med én svart side, og én med fem svarte sider (én hvit side). Det er to typer terninger med to svarte sider – de svarte sidene kan være naboer eller motsatt av hverandre. Av samme grunn er det to typer terninger med fire svarte (to hvite) sider. Det er to typer terninger med tre svarte sider – de tre sidene er alle naboer med hverandre, eller to av de tre sidene er motsatt av hverandre. . . . . **D**

Oppgave 16. Siste siffer i a_{n+1} er siste siffer av produktet av siste siffer i a_n og siste siffer i a_{n-1}. Sistesifrene i a_1, a_2, ... følger dermed mønsteret 1, 2, 2, 4, 8, 2, 6, 2, 2, 4, 8, 2, 6, ..., og sifrene gjentar seg i en periode på 6. Spesielt er 2 siste siffer i a_n når n gir rest 3 ved divisjon med 6, noe 2007 gir. . . . . . **B**

Oppgave 17. Adderer vi likningene, får vi $6a = 8c$, så $a > c$. Subtraherer vi den andre likningen fra den første, får vi $2a + 2b = 2d$, altså $a + b = d$. Så $d > a > c$ og $d > b$. . . . . **D**

Oppgave 18. La a være lengden av kateten og b lengden av hypotenusen. Da er $3^6 = 27^2 = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$, som gir primtallsfaktoriseringen av $(b - a)(b + a)$. Fordi $b - a < b + a$, er $(b - a, b + a)$ lik $(1, 3^6)$, $(3, 3^5)$ eller $(3^2, 3^4)$, som gir henholdsvis 364, 120 eller 36 for $a = (-(b - a) + (b + a))/2$. . . . . **C**

Oppgave 19. $77 = BA + B^2 + (A + B)C = B(A + B) + (A + B)C = (A + B)(B + C)$. Fordi 77 er produktet av de to primtallene 7 og 11, må $A + B$ og $B + C$ være 7 og 11. Prisen for én appelsin, to bananer og én klementin er $A + 2B + C = (A + B) + (B + C) = 7 + 11 = 18$. . . . . **C**

Oppgave 20. Oppdelingen av kvadratet danner en mengde vinkler med topppunkter i punktene. Vinkelsummen er $4 \cdot 90° + 2007 \cdot 360°$. Vi kan også finne vinkelsummen ved å summere vinkelsummen i alle de n trekantene, $n \cdot 180°$. Så $180n = 4 \cdot 90 + 2007 \cdot 360$, som gir $n = 2 + 2 \cdot 2007 = 4016$. . . . . **D**

Fasit

1		C	11		D
2		A	12		B
3		B	13		B
4		C	14		B
5		D	15		D
6		D	16		B
7		D	17		D
8		E	18		C
9		A	19		C
10		D	20		D

Hvis denne sida kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.