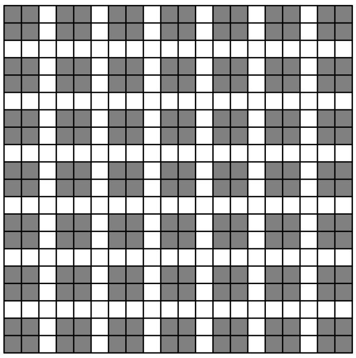
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2007–2008. *Løsninger*

Andre runde 17. januar 2008

Oppgave 1. De to vokalene kan være bokstav nr. 1 og 3, 1 og 4, 1 og 5, 2 og 4, 2 og 5 eller 3 og 5 – til sammen 6 muligheter. For hver av disse 6 mulighetene er det 2 muligheter for rekkefølgen av vokalene – til sammen $6 \cdot 2 = 12$ muligheter. For hver av disse 12 mulighetene er det 3 muligheter for konsonant på første ledige plass og dernest 2 muligheter for konsonant på andre ledige plass – til sammen $12 \cdot 2 \cdot 3 = 72$ muligheter. Den siste konsonanten tar den siste ledige plassen. **72**

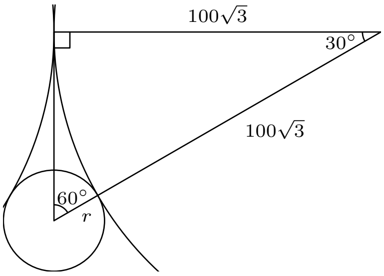
Oppgave 2. La x være antall ganger som knappen for 11 etasjer opp må trykkes og y antall ganger som knappen for 8 etasjer ned må trykkes. Da er $1 + 11x - 8y = 3$, altså $11x - 8y = 2$. Hvis x er et oddetall, så er venstresida et oddetall og høyresida et partall – altså må x være et partall. $x = 2$ eller 4 gir ikke noen heltallige muligheter for y, men $x = 6$, $y = 8$ er en løsning. Større verdier av x gir også større verdier for y, så $6+8 = 14$ er minste antall trykk. **14**



Oppgave 3. Ei hjørnerute har bare tre naboer, og må dermed være svart og bare ha svarte naboer. Resten av fargeleggingen av hele rutenettet tvinger seg fram (se figur). Det er $7 \cdot 7 \cdot 4 = 196$ svarte ruter. **196**

Oppgave 4. Fordi n er delelig på 2 og 3, er 2 og 3 primfaktorer i n. Multiplisiteten til 2 som primfaktor i n må være odde, fordi $n/2$ er et kvadrattall, og delelig med 3, fordi $n/3$ er et kubikktall. Minste mulige multiplisitet er 3. Multiplisiteten til 3 som primfaktor i n må være jamn, fordi $n/2$ er et kvadrattall, og multiplisiteten minus én må være delelig med 3, fordi $n/3$ er et kubikktall. Minste mulige multiplisitet er 4. Minste mulighet for n er dermed $2^3 \cdot 3^4 = 648$, som tilfredsstiller kravene i oppgaven. **648**

Oppgave 5. Ei linje som går gjennom sentrene til to tangerende sirkler, går også gjennom tangeringspunktet mellom sirklene. Ved å trekke en radius i den største sirkelen som går gjennom senteret i en av de mellomstore sirklene, ser en dermed at $R = r + 2 \cdot 100\sqrt{3}$, der R er radien i den store sirkelen.

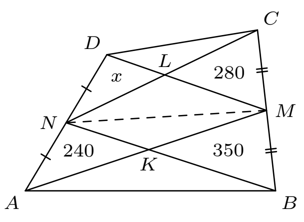


En trekant med sentrene i to av de mellomstore sirklene og sentrum i den lille sirkelen som hjørner er likebeint, med vinkel 120° mellom de like lange sidene. En trekant med tangeringspunktet mellom to av de mellomstore sirklene, sentrum i den lille sirkelen og sentrum i en av de to nevnte mellomstore sirklene som hjørner er dermed rettvinklet og med én vinkel lik 60° (se figur). Hypotenusen har lengde $r + 100\sqrt{3}$ og kateten som er motstående til 60°-vinkelen har lengde $100\sqrt{3}$. Den andre kateten har lengde som er halvparten av hypotenusens, noe som er velkjent, men som lett ses ved å speile trekanten om den lengste kateten slik at en likesidet trekant dannes.

Ved Pytagoras' setning er $(r + 100\sqrt{3})^2 = (100\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{2}(r + 100\sqrt{3}))^2$, som gir $\frac{\sqrt{3}}{2}(r + 100\sqrt{3}) = 100\sqrt{3}$, $r + 100\sqrt{3} = 200$, og dermed er $r + R = 2r + 2 \cdot 100\sqrt{3} = 2(r + 100\sqrt{3}) = 2 \cdot 200 = 400$. **400**

Oppgave 6. Fire ganger tverrsummen av et k-sifret tall er høyst $4 \cdot k \cdot 9 = 36k$, mens et k-sifret tall minst er lik 10^{k-1}. Skal fire ganger tverrsummen være lik tallet, må $10^{k-1} \leq 36k$, noe som bare er mulig for $1 \leq k \leq 3$. La sifrene i tallet være a, b og c, slik at tallet er lik $100a + 10b + c$. Vi ønsker $100a + 10b + c = 4(a + b + c)$, som gir $32a + 2b = c$, der a, b og c altså er heltall fra og med 0 til og med 9 (ikke alle lik 0). Det fins ingen løsninger med $a > 0$, så $a = 0$ og $2b = c$. Dette gir fire tall som er lik fire ganger sin tverrsum – 12, 24, 36 og 48. . . . . **4**

Oppgave 7. Legg merke til at $\frac{100}{k(k+1)} = \frac{100}{k} - \frac{100}{k+1}$ for $k \neq 0$, $k \neq -1$. Det gir $\frac{100}{1 \cdot 2} + \frac{100}{2 \cdot 3} + \frac{100}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{100}{99 \cdot 100} = \frac{100}{1} - \frac{100}{2} + \frac{100}{2} - \frac{100}{3} + \frac{100}{3} - \frac{100}{4} + \cdots + \frac{100}{99} - \frac{100}{100} = 100 - 1 = 99$. **99**



Oppgave 8. La x være arealet av trekanten NLD. Trekantene ANM og DNM har like lang grunnlinje og høyde, og dermed samme areal. Det samme gjelder trekantene BMN og CMN. Summen av arealene av trekantene ANM og CMN er altså lik summen av arealene av trekantene DNM og BMN, det vil si at arealet av firkanten $AMCN$ er lik arealet av firkanten $BMDN$. Firkanten $KMLN$ er felles for de to firkantene, slik at $x + 350 = 240 + 280$, og $x = 170$. **170**

Oppgave 9. Legger vi sammen de to likningene, får vi $x^2+y^2+2xy+x+y = 306$, altså andregradslikningen $(x+y)^2+(x+y)-306=0$ i $x+y$, som gir $x+y=-18$ eller $x+y=17$. Første likning minus tre ganger andre likning gir $x^2-2xy+y^2-3x-3y=-2$, eller $(x-y)^2 = 3(x+y)-2 = 3\cdot 17-2 = 49$ ($x+y \neq -18$ fordi $(x-y)^2$ må være ikkenegativ). (Fra $x+y=17$ og $x-y=\pm 7$ finner vi $(x,y)=(5,12)$ eller $(x,y)=(12,5)$, som virkelig oppfyller de gitte likningene.) **49**

Oppgave 10. Hvis $k=36$, kan fordelingen av brikkene (røde–blå–grønne) være Anna 18–18–0, John 9–9–18, Pål 9–9–18, og dermed er det ikke to forskjellige som har 10 røde og 10 blå. Det er også lett å konstruere tilsvarende eksempler for $k<36$ ved å fjerne tre brikker om gangen – én fra hver spiller og én av hver farge.

Hvis $k \geq 37$, har minst én spiller $k/3 > 12$ eller flere røde, minst én spiller $k/3$ eller flere blå og minst én spiller $k/3$ eller flere grønne. Anta at dette ikke er tre forskjellige spillere, for eksempel at Anna har minst $k/3$ røde og minst $k/3$ blå. Hun har da høyst $k/3$ grønne, og John og Pål minst $2k/3$ grønne til sammen.

La oss si at Pål har minst like mange grønne som John. Pål har da minst $k/3 > 12$ grønne.

John kan høyst ha $k/2$ grønne (ellers ville han ha hatt flere enn Pål), og dermed minst $k/2 > 18$ røde og blå, altså minst 10 røde eller minst 10 blå – la oss si blå.

Så hvis $k \geq 37$, har en av spillerne minst 13 av en farge, en annen minst 13 av en annen farge, og en tredje minst 10 av en tredje farge. **37**

Fasit

1		**72**	6		**4**
2		**14**	7		**99**
3		**196**	8		**170**
4		**648**	9		**49**
5		**400**	10		**37**

Hvis denne sida kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.