Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
2008–2009. *Løsninger*

Finale 12. mars 2009

Oppgave 1.

a. Vi benytter identiteten $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Når a og b er heltall vil $a-b$ og $a+b$ ha samme paritet, det vil si de er enten begge oddetall eller begge partall. Derfor er ethvert slikt tall enten et oddetall eller et multiplum av 4, så et partall som ikke er et multippel av 4, altså på formen $4k+2$, er ikke differansen mellom to kvadrattall.

b. Alle oddetall og alle multipler av 4 kan skrives som en differanse mellom to kvadrattall, fordi et slikt tall kan skrives som et produkt av to heltall x og y med samme paritet. Og da er $a = \frac{1}{2}(x+y)$ og $b = \frac{1}{2}(x-y)$ heltall med $a+b = x$ og $a-b = y$, så $xy = a^2 - b^2$.

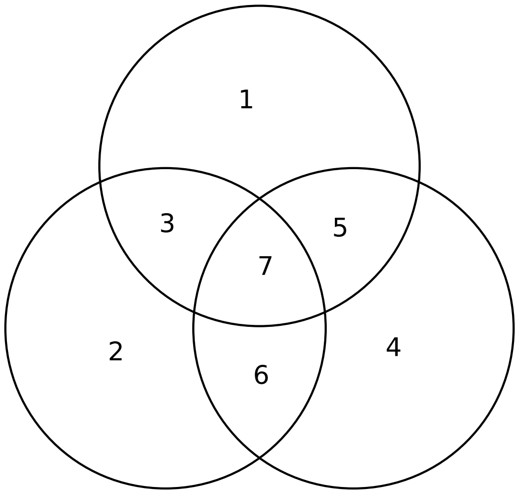
En sum av tre på hverandre følgende kubetall kan skrives $n = (m-1)^3 + m^3 + (m+1)^3$. Dersom m er et oddetall blir også n odde, og dersom m er et partall blir $n = 3m^3 + 6m$ et multiplum av 4. I begge tilfeller er n en differanse mellom to kvadrattall.

Alternativt bruker vi $1^3 + 2^3 + \cdots + m^3 = (1+2+\cdots+m)^2 = (\frac{1}{2}m(m+1))^2$, slik at $n = (m-1)^3 + m^3 + (m+1)^3 = \left(\frac{1}{2}(m+1)(m+2)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(m-2)(m-1)\right)^2$. Mer generelt er *enhver* sum av påfølgende kubetall en differanse mellom to kvadrattall.

Oppgave 2.

a. Det finnes 2^7 ord med 7 bokstaver. For hvert ord i språket sier vi at *omegnen* til ordet består av ordet selv og alle ord som avviker fra ordet på bare en plass. En slik omegn består av 8 ord, og omegnene om to ord i språket kan ikke ha noen ord felles. Derfor er det høyst $2^7/8 = 16$ ord i språket.

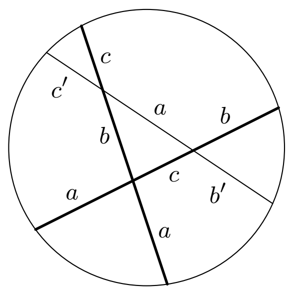
b. Vi kan definere et språk med 16 ord slik: Vi nummererer de sju feltene i figuren fra 1 til 7. Vi kan spesisifisere et ord ved å putte bokstav nummer k i felt nummer k for $k = 1, \ldots, 7$. Vi tillater et ord i språket å ha en hvilken som helst kombinasjon av de to bokstavene A, B i de fire innerste feltene, og velger deretter bokstaver i de tre ytterste feltene slik at det er et jevnt antall B-er innenfor hver av de tre sirklene. Hvis to ord er forskjellige bare i ett av de fire innerste feltene, må



de være forskjellige i minst to av de tre ytre. Og er de forskjellige i nøyaktig to av de fire innerste feltene, er de forskjellige i minst ett av de tre ytterste. I alle tilfeller ser vi at to ord som er forskjellige i minst ett av de fire innerste feltene er forskjellige på minst tre plasser. Og to ord som er like i de fire innerste feltene er like.

Oppgave 3.

a. Først viser vi at de fire endepunktene til de to forlengede sidene gjennom A (tykkere i figuren) ligger på en sirkel. Trekk en sirkel gjennom de to endepunktene nærmest A og ett av de to andre endepunktene, og merk at A har potensen $-(b+c)a$ med hensyn på denne sirkelen. Fra definisjonen av potens følger det at det fjerde endepunktet også må ligge på denne sirkelen.



Vi kompletterer figuren ved å forlenge den tredje siden av trekanten til den treffer sirkelen på begge sider. Vi må vise at $b' = b$ og $c' = c$. Ved å betrakte potensen til B ser vi at $(a+c')b' = (a+c)b$, og ved å betrakte potensen til C ser vi at $(a+b')c' = (a+b)c$. Trekker vi disse to ligningene fra hverandre får vi $a(b'-c') = a(b-c)$, og ettersom $a \neq 0$ får vi $b'-c' = b-c$, som vi heller ønsker å skrive på formen $b'-b = c'-c$.

Vi skriver så om ligningen $(a+c')b' = (a+c)b$ til $(b'-b)a + b'c' - bc = 0$, og videre til $(b'-b)a + (b'-b)c' + b(c'-c) = 0$. Ettersom $c'-c = b'-b$ blir $(b'-b)(a+c'+b) = 0$, slik at $b'-b$ må være null, og derfor $b' = b$ og altså $c' = c$.

b. La x være et rasjonalt tall slik at $2x$ ikke er et heltall, og la y være et irrasjonalt tall. Da har alle gitterpunkter (i,j) forskjellig avstand til (x,y). For om (i,j) og (k,l) begge har samme avstand til (x,y), blir $(i-x)^2 + (j-y)^2 = (k-x)^2 + (l-y)^2$, som leder til $i^2 + j^2 - k^2 - l^2 = 2(i-k)x + 2(j-l)y$. Dersom $j \neq l$ følger at y er rasjonalt, så det er ikke mulig. Dersom $j = l$ står vi igjen med $i^2 - k^2 = 2(i-k)x$. Hvis $i \neq k$ følger $i+k = 2x$, som strider mot valget av x.

Vi kan nå ordne alle gitterpunktene i rekkefølge: (i_1, j_1), (i_2, j_2), $(i_3, j_3), \ldots$ med økende avstander $r_1 < r_2 < r_3 < \cdots$ fra (x,y). Dette er mulig fordi alle har forskjellig avstand fra (x,y), og fordi det bare finnes et endelig antall gitterpunkter med avstand mindre enn et fast tall M fra (x,y) for hver M. En sirkel med sentrum i (x,y) og radius mellom r_n og r_{n+1} vil nå inneholde nøyaktig de n gitterpunktene $(i_1, j_1), \ldots, (i_n, j_n)$.

Oppgave 4.

a. Mer generelt er $\big((N+1)/N\big)^N > 2$ for ethvert naturlig tall $N > 1$, for $(1+a)^N = 1 + Na + \cdots$ der alle de utelatte leddene er positive, og setter vi $a = 1/N$ gir det $\big((N+1)/N\big)^N = 1 + N/N + \cdots > 2$.

b. Siden $0 < x < 1$ er $x + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2^m} = x^{2^0} + x^{2^1} + x^{2^2} + \cdots + x^{2^m} < m + 1$ for $m = 1, 2, 3, \ldots, 2008$.

Fra generaliseringen av punkt a er $\big(N/(N+1)\big)^N < \frac{1}{2}$. Bytter vi ut N med $N-1$ får vi $(1 - 1/N)^{N-1} < \frac{1}{2}$, og derfor også $(1 - 1/N)^N < \frac{1}{2}$.

Med $N = 2^{2009}$ gir dette $x^{2^{2009}} < \frac{1}{2}$. Ved induksjon finner vi $x^{2^{2009+k}} < 2^{-2^k}$ for $k = 0$, $1, \ldots$, slik at $x^{2^{2009}} + x^{2^{2010}} + \cdots + x^{2^m} < 1$ for alle $m \geq 2009$. Legger vi til ulikheten for $m = 2008$, altså $x + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2^{2009}} < 2009$, får vi $x + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2^m} < 2010$.