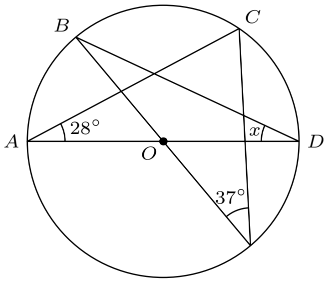
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2008–2009. *Løsninger*

Andre runde 22. januar 2009

Oppgave 1. Det er i alt $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ tall i de første sju radene. Det største tallet er $2 \cdot 28 - 1 = 55$, og $1 + 3 + \cdots + 55 = ((1 + 55) + (3 + 53) + \cdots + (55 + 1))/2 = 28 \cdot 56/2 = 784$. **784**

Oppgave 2. La det være N egg i kurven. $N - 1$ er delelig med 2, 3, 4, 5 og 6, og dermed også med minste felles multiplum av disse, som er 60. Altså er $N - 1 = 60k$ for et heltall $k \geq 0$. N er delelig med 7, og derfor er også $N - 7 \cdot 8k = 4k + 1$ delelig med 7. For $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ får vi $4k + 1 = 1, 5, 9, 13, 17, 21$. Bare det siste av disse tallene er delelig med 7, så minste mulighet er $k = 5$. Det gir $N = 60 \cdot 5 + 1 = 301$. **301**



Oppgave 3. Vinkelen x spenner over en bue på $2x$. Dette følger av at en sentralvinkel er dobbelt så stor som en periferivinkel som spenner over samme bue. (I dette tilfellet, der det ene vinkelbeinet er diameter i sirkelen, er det lett å vise: Trekanten DOB er likebeint, så vinkel B er lik x, og vinkel DOB er $180° - 2x$. Dermed er komplementvinkelen AOB – sentralvinkelen som spenner over samme bue – lik $2x$.) Så buen AB er $2x$. Samme resonnement viser at buen BC er $2 \cdot 37°$ og at buen CD er $2 \cdot 28°$. Til sammen er de tre buene $180°$, altså $2(x + 37° + 28°) = 180°$, og $x = 25°$. **25**

Oppgave 4. Vi gir ridderne nummer fra 1 til 6, der Sir Lancelot selvsagt er nummer 1. Vi skriver den opprinnelige bordplasseringen, regnet fra Sir Lancelot mot høyre, som 123456, der vi altså må huske at den siste (6) er nabo til den første (1). Sir Lancelots nye naboer må altså velges blant 3, 4 og 5. Vi regner opp alle muligheter der den av Sir Lancelots naboer med lavest nummer sitter til høyre, og må derfor huske å gange med to til slutt. Så langt har vi mulighetene 13xxx4, 13xxx5 og 14xxx5, der de tre x-ene representerer de tre andre ridderne. Men vi ser raskt at det bare er ett mulig valg i hvert av de tre tilfellene: 13xxx4 må være 135264, 13xxx5 må være 136425 og 14xxx5 må være 142635. Disse tre mulighetene må vi altså gange med to. **6**

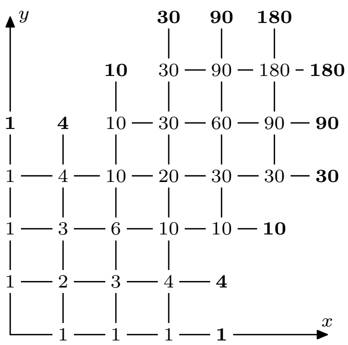
Oppgave 5. Vi har $3(x + y) = 10\sqrt{xy}$, og divisjon med x gir $3(1 + y/x) = 10\sqrt{y/x}$, eller $3(1 + \alpha^2) = 10\alpha$, der $\alpha = \sqrt{y/x}$. Denne andregradslikningen har løsninger $\alpha = (5 \pm 4)/3$, og fordi $\alpha > 1$, må vi velge den største løsningen, $\alpha = 3$, som gir $y/x = 9$. **9**

Oppgave 6. Ved å ta inversen av begge sidene av likningen får vi $1/f(n+1) = 1/f(n) + a$ for $n = 1, 2, \ldots$ Så $2009 = 1/f(9) = 1/f(8) + a = 1/f(7) + 2a = \cdots = 1/f(1) + 8a = 1 + 8a$, og $a = (2009 - 1)/8 = 251$. **251**

Oppgave 7. La de mellomstore sirklene ha radius $R = 15/\sqrt{\pi}$ og de små sirklene r. En rettvinklet trekant med hjørner i sentrene til den store sirkelen, en mellomstor og en liten sirkel har kateter med lengde $2R - r$ og R og hypotenus med lengde $R + r$. Altså er $(R + r)^2 = (2R - r)^2 + R^2$, som gir $2Rr = 4R^2 - 4Rr$, slik at $r = 2R/3 = 10/\sqrt{\pi}$. Det skyggelagte området får areal $\pi((2R)^2 - 2R^2 - 2r^2) = 2\pi(R^2 - r^2) = 2(15^2 - 10^2) = 250$. **250**

Oppgave 8. Anta at $2009 + n^2 = N^2$, der N er et positivt heltall. Da er $7^2 \cdot 41 = 2009 = (N - n)(N + n)$. Fordi $N - n < N + n$, gir det mulighetene 1, 7 eller 41 for $N - n$, og dermed henholdsvis 2009, 287 eller 49 for $N + n$. De mulige verdiene av $n = \frac{1}{2}((N - n) + (N + n))$ blir 1004, 140 eller 4, som har sum 1148. Halvparten er 574. . . . . **574**

Oppgave 9. La de tre hjørnene ha koordinatsum $x + y$ henholdsvis a, b og c. Midtpunktene på de tre sidene har koordinatsum henholdsvis $a' = 23 + 32 = 55$, $b' = 8 + 41 = 49$ og $c' = 17 + 45 = 62$. Koordinatsummen til et midtpunkt på en side er lik gjennomsnittet av koordinatsummene til hjørnene på siden, slik at $2a' = b + c$, $2b' = c + a$ og $2c' = a + b$. Hvis vi adderer likningene, får vi $a + b + c = a' + b' + c' = 166$, slik at $a = 166 - 2a'$, $b = 166 - 2b'$ og $c = 166 - 2c'$. Den største av disse svarer til den minste av a', b', c', altså $b = 166 - 2b' = 166 - 2 \cdot 49 = 68$. **68**



Oppgave 10. La (x, y) betegne stillingen x poeng til Kari og y poeng til Mons. Da var forrige stilling $(x - 1, y)$ eller $(x, y - 1)$. Hvis ingen av disse to stillingene innebærer at en av spillerne har vunnet, er antall måter (x, y) kan oppnås på, summen av antall måter hver av disse to stillingene kan oppnås på. Hvis en av disse to stillingene innebærer at en av spillerne har vunnet, er antall måter (x, y) kan oppnås på lik antall måter den andre av de to stillingene kan oppnås på.

Stillingene $(1,0)$ og $(0,1)$ kan bare oppnås på én måte. Ved gjentatt bruk av regelen ovenfor kan vi finne antall måter enhver stilling kan oppnås på. I diagrammet, som kan fylles ut radvis nedenfra og oppover, og fra venstre til høyre i hver rad, er tallet i punktet (x,y) antall måter stillingen (x,y) kan oppnås på. Antallene for sluttstillingene er vist med feit skrift, og summen av disse antallene er 630. . . . . **630**

Fasit

1		**784**	6		**251**
2		**301**	7		**250**
3		**25**	8		**574**
4		**6**	9		**68**
5		**9**	10		**630**

Hvis denne sida kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.