Nynorsk

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2009–2010

Finale 11. mars 2010

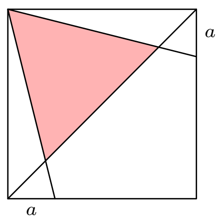
I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (åtte punkt) som skal løysast på fire timar. Svara skal grunngivast og førast på eigne ark. Begynn på nytt ark for kvar oppgåve.

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Det gir ein poengsum mellom 0 og 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir, skrivereiskapar og tospråklege ordbøker er tillatne.

Oppgåve 1

a. Punktet P ligg på sida AB til ein firkant $ABCD$. Vinklane BAD, ABC og CPD er rette, og $AB = BC + AD$. Vis at $BC = BP$ eller $AD = BP$.



b. Sidene i kvadratet på figuren har lengd 1. Finn arealet av det merkte området uttrykt ved a, der $0 \le a \le 1$.

Oppgåve 2

a. Vis at $\dfrac{x^2}{1-x} + \dfrac{(1-x)^2}{x} \ge 1$ for alle reelle tal x, der $0 < x < 1$.

b. Vis at $abc \le (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2)^2$ for alle positive reelle tal a, b og c som er slik at $a + b + c = 1$.

Oppgåve 3

a. Det er 25 deltakarar i ein matematikkonkurranse med fire oppgåver. Kvar oppgåve blir rekna som løyst eller ikkje løyst (det er altså ikkje mogleg med delvis rette svar). Vis at det anten finst fire deltakarar som har løyst dei same oppgåvene (eller ikkje fått til nokon av dei), eller to deltakarar der den eine har løyst nøyaktig dei oppgåvene som den andre ikkje har løyst.

b. Det er k sportsklubbar for elevar i ein vidaregåande skule. Skulen har 100 elevar, og same kva for tre av dei vi plukkar ut, så finst det ein klubb der minst éin av dei, men ikkje alle, er med. Kva er minste moglege verdi av k?

Oppgåve 4

a. Finn alle positive heile tal k og l som er slik at $k^2 - l^2 = 1005$.

b. La $n > 2$ vere eit heilt tal. Vis at det er mogleg å velje n punkt i planet, som ikkje alle ligg på éi linje, slik at avstanden mellom alle par av punkt er heiltalig (det vil seie at $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ er heiltalig for alle par (x_1, y_1) og (x_2, y_2) av punkt).