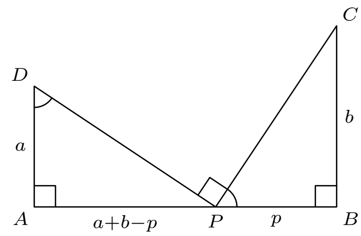
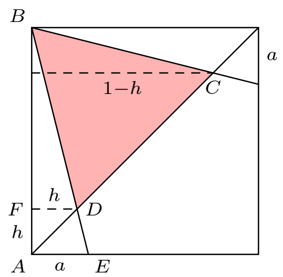
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2009–2010. *Løsninger*

Finale 11. mars 2010

Oppgave 1.



a. La $a = AD$, $b = BC$ og $p = BP$, slik at $AP = a + b - p$. Formlikhet av trekantene APD og BCP (begge har en rett vinkel, og $\angle BPC = 180° - 90° - \angle APD = \angle ADP$) gir $(a+b-p)/a = b/p$, som er ekvivalent med $(a-p)(p-b) = 0$, altså $a = p$ eller $b = p$.



b. La h og $1-h$ være høydene av trekanter som angitt på figuren (merk at alle høyder fra C og D til kvadratsidene er h eller $1-h$ fordi diagonalen danner 45° vinkler med kvadratsidene og på grunn av symmetri om diagonalen som ikke er avmerket). Arealet av trekanten BCD er differansen mellom arealene av trekantene ABC og ABD, altså $\frac{1}{2}(1-h) - \frac{1}{2}h = \frac{1}{2} - h$. Formlikhet av trekantene AEB og FDB gir $1/a = (1-h)/h = 1/h - 1$, eller $h = 1 - 1/(1+a)$, og arealet blir $1/(1+a) - \frac{1}{2}$.

Oppgave 2.

a. Vi har $4x(1-x) \leq 4x(1-x) + (2x-1)^2 = 1 = (x + (1-x))^3 = x^3 + 3x(1-x) + (1-x)^3$, som gir $x(1-x) \leq x^3 + (1-x)^3$, og når $0 < x < 1$, får vi $x^2/(1-x) + (1-x)^2/x \geq 1$.

b. Vi skal flere ganger bruke at $x^2 + y^2 \geq 2xy$ for alle reelle tall x og y. Dette følger fra $(x-y)^2 \geq 0$.

Anta at at $a + b + c = 1$. Da er $ab + bc + ca = (ab + bc + ca)(a + b + c) = (a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b + 3abc \geq 9abc$. Videre er $3(a^2 + b^2 + c^2) = a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 = 1$. (De to ulikhetene som er vist her er ekvivalent med henholdsvis den såkalte HM-AM-ulikheten og AM-QM-ulikheten.)

For positive a, b og c følger det at $(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 9abc \cdot (\frac{1}{3})^2 = abc$.

Oppgave 3.

a. Del opp deltakerne i grupper etter hvilke oppgaver de har løst. Det blir $2^4 = 16$ grupper, siden hver deltaker enten har løst eller ikke løst hver av de fire oppgavene. (Noen grupper kan være tomme.)

Slå deretter sammen to og to grupper, der deltakerne i den ene gruppa har løst nøyaktig de oppgavene som deltakerne i den andre gruppa ikke har løst. (En deltaker som har løst oppgave 1–3, men ikke 4, kommer da i samme gruppe som en deltaker som har løst 4, men ikke 1–3.) Nå blir det 8 grupper.

Ikke alle disse 8 gruppene kan ha 3 eller færre deltakere (da måtte det ha vært 24 eller færre deltakere), så minst én gruppe har 4 eller flere medlemmer. Enten har alle i denne gruppa løst de samme oppgavene, eller så er det minst én som har løst nøyaktig de oppgavene en av de andre ikke har løst.

b. La det være 6 klubber. Da er det $2^6 = 64$ mulige kombinasjoner av medlemsskap i klubbene. La elevene være fordelt på disse kombinasjonene på en slik måte at 1 eller 2 elever hører til hver kombinasjon (64 kombinasjoner med 1 elev og 36 kombinasjoner med 2). Hvis vi plukker ut 3 elever, må det da være minst to av dem som har forskjellig kombinasjon av medlemsskap – det vil si at det minst er én klubb der den ene er medlem, men ikke den andre. Altså er minst én av de tre, men ikke alle, medlem av denne klubben. Så $k = 6$ er mulig.

Hvis $k \leq 5$, er det høyst $2^5 = 32$ mulige kombinasjoner av medlemsskap. Siden $100 > 2 \cdot 32$, må det være minst 3 elever som har samme kombinasjon av medlemsskap. Hvis disse 3 elevene blir valgt, er det for hver klubb slik at enten alle tre eller ingen av de tre er medlem. Minste mulige verdi av k er dermed 6.

Oppgave 4.

a. Vi ønsker $(k-l)(k+l) = k^2 - l^2 = 1005 = 3 \cdot 5 \cdot 67$, der $3 \cdot 5 \cdot 67$ er primfaktoriseringen av 1005. Siden $k - l < k + l$ betyr det at $(k-l, k+l)$ er lik $(1,\ 3 \cdot 5 \cdot 67)$, $(3,\ 5 \cdot 67)$, $(5,\ 3 \cdot 67)$ eller $(3 \cdot 5,\ 67)$, som henholdsvis gir (k, l) lik $(503, 502)$, $(169, 166)$, $(103, 98)$ eller $(41, 26)$.

b. La c være et helt tall større enn 1, for eksempel $c = 2$, og la de n punktene være $(0, 2c^{n-2})$ og $(c^{2(k-1)} - c^{2(n-k-1)}, 0)$, der $1 \leq k \leq n-1$. Disse ligger ikke på samme linje – ett ligger på positiv y-akse og resten på x-aksen. De er også distinkte, da $c^{2(k-1)}$ vokser og $c^{2(n-k-1)}$ minker med k. Avstanden mellom alle par av punkter på x-aksen er heltallig (siden c er heltallig).

Kvadratet av avstanden mellom $(0, 2c^{n-2})$ og $(c^{2(k-1)} - c^{2(n-k-1)}, 0)$ er ved Pytagoras' læresetning $4c^{2(n-2)} + c^{4(k-1)} + c^{4(n-k-1)} - 2c^{2(n-2)} = c^{4(k-1)} + c^{4(n-k-1)} + 2c^{2(n-2)} = (c^{2(k-1)} + c^{2(n-k-1)})^2$, altså et kvadrattall, så alle avstander mellom par av punkter er heltallig.