Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2009–2010. *Løsninger*

Første runde 5. november 2009

Oppgave 1. Det første huset kan males i én av 3 farger. For hver av disse mulighetene er det 2 muligheter for neste hus – til sammen 6 muligheter. For hver av disse mulighetene er det 2 muligheter for neste hus – til sammen 12 muligheter. For hver av disse mulighetene er det 2 muligheter for neste hus – til sammen 24 muligheter. .... **B**

Oppgave 2. $512 = 2^9 = 8^3$. Begge mulighetene gir $x + y = 11$. .... **E**

Oppgave 3. Antall hjul ville ha vært 200 hvis alle kjøretøyene var mopeder. Vi har $356 - 200 = 156$ ekstra par hjul, altså er det $156/2 = 78$ biler. Forholdet mellom antall biler og antall mopeder er $78/(100 - 78) = 39/11$. **D**

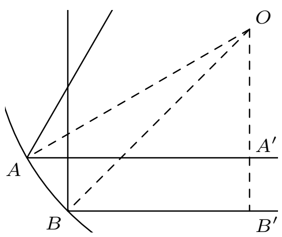
Oppgave 4. Arealet av det ene hvite området er differansen mellom arealet av et kvadrat med side 1 og en kvartsirkel med radius 1, altså $1 - \pi/4$. Arealet av det grå området er differansen mellom arealet av kvadratet og to ganger arealet av et hvitt område, $1 - 2(1 - \pi/4) = \pi/2 - 1$. .... **C**

Oppgave 5. Summen av guttenes alder er $12 \cdot 10{,}5 = 126$ og summen av alle barnas alder $30 \cdot 11 = 330$. Summen av jentenes alder er dermed $330 - 126 = 204$, som gir et gjennomsnitt på $204/18 = 11\frac{1}{3}$. .... **D**

Oppgave 6. Det første sifferet kan velges på 2 måter. For hver av disse mulighetene kan andre siffer velges på 10 måter og tredje siffer på 10 måter – til sammen 200 muligheter. Hvis summen av de tre første sifrene er partall, velges 8 som siste siffer, ellers 9. .... **D**

Oppgave 7. Fordi produktet har 9 som siste siffer og den andre faktoren har 1 som andre siffer, er siste siffer i første faktor 9, $49 \cdot \square 1 = 2\square 09$. De eneste mulighetene for første siffer i andre faktor som gir et produkt mellom 2000 og 3000, er 4, 5 eller 6, og det eneste av disse som stemmer overens med produktet, er 4, som gir $49 \cdot 41 = 2009$. (Alternativt kan en tenke seg multiplikasjonsstykket satt opp på vanlig måte, og innse at hvis x er det gjenværende ukjente sifferet på venstre side, så må $4 + 9x$ ha 0 som siste siffer, alså må $9x$ ha 6 som siste siffer, og $x = 4$.) Summen av de tre sifrene er $9 + 4 + 0 = 13$. .... **B**

Oppgave 8. 9 kaker er tre fjerdedeler av dem som verken har sjokolade eller nøtter, så 12 har verken sjokolade eller nøtter. Disse 12 er to tredjedeler av dem som ikke har sjokolade, så 18 har ikke sjokolade. Dette er halvparten av alle, så hun baker 36 kaker. . . . . **C**



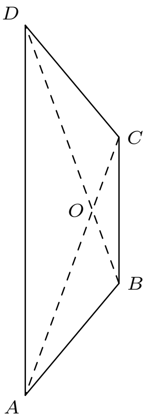
Oppgave 9. La O være sentrum i sirkelen og A' og B' fotpunktene for normalene fra O til henholdsvis grunnlinja i trekanten og kvadratet. La A og B være nedre venstre hjørne i henholdsvis trekanten og kvadratet. Da er OA og OB radier i sirkelen og har lengder 1. Vinkelen AOA' er 60° (en vinkel med toppunkt i O og vinkelbein som går gjennom to av trekantens hjørner er 120°), og speiles trekanten $AA'O$ om AA' får vi en likesidet trekant, noe som viser at OA' har lengde halvparten av OA, altså $\frac{1}{2}$. Vinkelen BOB' er 45° (en vinkel med toppunkt i O og vinkelbein som går gjennom to nabohjørner i kvadratet er 90°), så trekanten $BB'O$ er likebeint. Av Pytagoras' læresetning følger det at to ganger kvadratet av katetenes lengde er $1^2 = 1$, slik at OB' har lengde $\sqrt{2}/2$. Avstanden mellom de to parallelle sidene er differansen mellom lengdene av OB' og OA', altså $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$. . . . . **B**

Oppgave 10. La de to tallene være x og y. Da er $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 10^2 - 2 \cdot 13 = 74$. . . . . **C**

Oppgave 11. Fra og med 1 til og med 33 er det 11 tall som er delelig med 3 og 3 tall som er delelig med 11, men da har vi regnet ett tall (33) to ganger, så det er bare 13 slike tall. Fra og med 34 til og med 66 er det 13 slike tall til, siden $33 + n$ er delelig med 3 eller 11 hvis og bare hvis n er det. Det 26. tallet i følgen er dermed $33 + 33 = 66$. Det største tallet mindre enn 66 som er delelig med 3 eller 11 er 63. . . . . **B**

Oppgave 12. Kurva består av 6 halvsirkler og 3 kurver som er 5/6 av en sirkel (en trekant der hjørnene er sentrene i tre like store sirkler som alle tangerer hverandre, er likesidet, og kantene går gjennom tangeringspunktene). Lengden er $6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi + 3 \cdot \frac{5}{6} \cdot 2\pi = 11\pi$. . . . . **D**

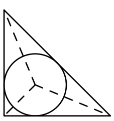
Oppgave 13. Første tall er $\sqrt{6^3} = ((2 \cdot 3)^3)^{1/2} = (2 \cdot 3)^{3/2} = 2^{3/2} \cdot 3^{3/2}$, neste tall er $2^{3/2} \cdot 3^{3/2}$, så $2^{1/2} \cdot 3^{1/3}$, så $\sqrt{8} \cdot \sqrt{27} = (2^3)^{1/2} \cdot (3^3)^{1/2} = 2^{3/2} \cdot 3^{3/2}$, og til slutt $\sqrt[6]{72} = (2^3 \cdot 3^2)^{1/6} = 2^{1/2} \cdot 3^{1/3}$. Det er to forskjellige tall (det ene er mindre enn det andre, da begge eksponentene er mindre). . . . . **B**



Oppgave 14. Fordi summen av vinklene A og D er mindre enn $90°$, er begge disse vinklene spisse, og dermed er A entydig bestemt av lengden av AB og avstanden fra B til AD, mens D er entydig bestemt av lengden av DC og avstanden fra C til AD. Fordi AB og DC er like lange og B og C har samme avstand til AD, er vinklene A og D like store, $40°$. Vinklene B og C er da $140°$ (supplementsvinklene er samsvarende vinkler med henholdsvis A og D). Trekantene ABC og DCB er likebeinte, slik at de andre vinklene i disse to trekantene er $20°$. Det følger at vinklene OAD og ODA er $20°$, slik at vinkelen AOD er $140°$ (vinkelsummen i trekanten er $180°$). .... **D**

Oppgave 15. Siste siffer i a_n er siste siffer i $2s+1$, der s er siste siffer i a_{n-1}. Sistesifrene i a_1, a_2, ... følger dermed mønsteret 1, 3, 7, 5, 1, 3, 7, 5, ... og gjentar seg i en periode på 4. Når n gir rest 1 ved divisjon med 4, som 2009 gir, er 1 siste siffer i a_n. .... **A**

Oppgave 16. Hvis vi har nummerert kulene fra 1 til 10, er det 10 muligheter for valg av første uttrukne kule, for hver av disse er det 9 muligheter for valg av andre kule, og for hver av disse kombinasjonene 8 muligheter for valg av tredje kule – til sammen $10 \cdot 9 \cdot 8$ mulige utvalg, som alle er like sannsynlige. La det være x blå, y røde og z gule kuler blant de 10. Av utvalg med én kule av hver farge fins det x muligheter for den blå kula, y for den røde og z for den gule – til sammen xyz utvalg hvis vi ikke tar hensyn til rekkefølgen de blir trukket i. Hvis vi tar hensyn til at det for hvert av disse xyz utvalgene er 6 mulige rekkefølger kulene kan trekkes i, har vi at $6xyz$ av de $10 \cdot 9 \cdot 8$ like sannsynlige utvalgene gir én kule av hver farge. Vi vet at $6xyz/(10 \cdot 9 \cdot 8) = 3/10$, altså $xyz = 36$, der $x+y+z = 10$. Fordi z er størst og 36 er delelig med z, er $z = 4$, 6 eller 9. Bare $z = 4$ gir noen mulighet for x og y (begge lik 3). .... **A**



Oppgave 17. Del inn trekanten i tre trekanter, hver med to hjørner fra den opprinnelige trekanten og med sentrum i sirkelen som siste hjørne. Høydene til sentrum av sirkelen i de små trekantene er alle 1, da radien til tangeringspunktet er vinkelrett på tangeringslinja. La katetene ha lengde x (trekanten er likebeint). Da har hypotenusen lengde $\sqrt{2}x$ ved Pytagoras' læresetning. To ganger arealet av trekanten er lik summen av to ganger arealene av småtrekantene, slik at $x^2 = x+x+\sqrt{2}x$, og divisjon med x gir $x = 2+\sqrt{2}$. Arealet av kvadratet er $(2x)^2 = (2(2+\sqrt{2}))^2 = 4(4+4\sqrt{2}+2) = 24+16\sqrt{2}$. .... **C**

Oppgave 18. Vi tenker oss at de fortsetter å spille også etter at førstemann har vunnet tre runder. Ole er førstemann til tre runder hvis og bare hvis han vinner 2 eller flere av de neste 4 rundene. Det er 16 like sannsynlige utfall av de neste 4 rundene. Ett gir 4 seire til Marte og 4 gir 3 seire til Marte. De resterende 11 gir 2 eller flere seire til Ole, så sannsynligheten er $11/16$. . . . **C**

Oppgave 19. Ved første kvadratsetning er $x^2 + 1/x^2 = (x + 1/x)^2 - 2$, og likningen fra oppgaven kan skrives $(x + 1/x)^2 + (x + 1/x) - 6 = 0$. Denne andregradslikingen gir $x + 1/x = -3$ (fordi x er negativ, kan ikke $x + 1/x$ være lik den andre løsningen, 2). Første kvadratsetning gir $x^4 + 1/x^4 = (x^2 + 1/x^2)^2 - 2 = ((x + 1/x)^2 - 2)^2 - 2 = ((-3)^2 - 2)^2 - 2 = 47$. . . . . **C**

Oppgave 20. La n være antall dager siden nyttårsaften. Da er $n - 1$ delelig med 11, så $k = (n-1)/11$ er et helt tall, og vi kan skrive $n = 11k+1$. Videre er $n - 2 = 11k - 1 = 10k + k - 1$ delelig med 5, så $k - 1$ er delelig med 5, og $k = 5l + 1$ for et heltall l. Vi kan nå skrive $n = 11(5l + 1) + 1 = 55l + 12$. Og $n - 3 = 55l + 9 = 56l + 7 - (l - 2)$ er delelig med 7, så $l - 2$ er delelig med 7, og $l = 7m + 2$ for et heltall m. Nå kan vi skrive $n = 55(7m + 2) + 12$. Bare $m = 0$ gir et positivt heltall mindre enn eller lik 365, nemlig $n = 122$, som er antall dager siden nyttårsaften. I de fire første månedene er det 120 dager, så datoen er 2. mai. . . . . **D**

Fasit

1		B	11		B
2		E	12		D
3		D	13		B
4		C	14		D
5		D	15		A
6		D	16		A
7		B	17		C
8		C	18		C
9		B	19		C
10		C	20		D

Hvis denne sida kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.