Bokmål

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2010–2011

Finale 10. mars 2011

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (åtte punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. Begynn på nytt ark for hver oppgave.

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

Oppgave 1

La n være tallet som framkommer ved å sette tallene 1, 2, …, 4022 etter hverandre, $n = 1234567891011\ldots40214022$.

a. Vis at n er delelig med 3.

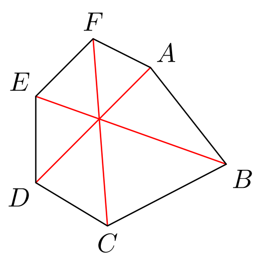
Tverrsummen av et positivt heltall er summen av sifrene i tallet. For eksempel er tverrsummen av 2536 lik 16, da $2 + 5 + 3 + 6 = 16$.

b. La $a_1 = n^{2011}$, og la a_i være tverrsummen av a_{i-1} for $i > 1$. Finn a_4.

Oppgave 2

a. I firkanten $ABCD$ har siden AB lengde 7, BC lengde 14, CD lengde 26 og DA lengde 23. Vis at diagonalene står vinkelrett på hverandre. Du kan anta at firkanten er konveks (alle innvendige vinkler er mindre enn 180°).

b. Diagonalene AD, BE og CF i en konveks sekskant $ABCDEF$ skjærer hverandre i et felles punkt. Vis at $a(ABE)\,a(CDA)\,a(EFC) = a(BCE)\,a(DEA)\,a(FAC)$, der $a(KLM)$ er arealet av trekanten KLM.



Oppgave 3

a. De positive tallene $a_1, a_2, \ldots$ er slik at $a_1 = 1$ og $(m+n)a_{m+n} \le a_m + a_n$ for alle positive heltall m og n. Vis at $1/a_{200} > 4 \cdot 10^7$.

b. Finn alle funksjoner f fra de reelle tall til de reelle tall som er slik at $f(xy) \le \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)$ for alle reelle tall x og y.

Oppgave 4

a. I en by er det n gater som går fra sør til nord. De er nummerert fra 1 til n (fra vest til øst). Det er n veier som går fra vest til øst – de er også nummerert fra 1 til n (fra sør til nord). Om man kjører gjennom krysset mellom k-te gate og l-te vei, må man betale kl kroner. Hvor mye må man minst betale for å kjøre fra krysset mellom første gate og første vei til krysset mellom n-te gate og n-te vei? (Man betaler også for start- og sluttkrysset.)

b. I en gruppe på 199 personer er hver person venn med nøyaktig 100 andre i gruppa. Alle vennskap er gjensidige, og vi regner ikke en person som venn med seg selv. For hvilke heltall $k > 1$ fins det garantert k personer i gruppa som alle er venner med hverandre?