Nynorsk

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2010–2011

Finale 10. mars 2011

I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (åtte punkt) som skal løysast på fire timar. Svara skal grunngivast og førast på eigne ark. Begynn på nytt ark for kvar oppgåve.

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Maksimal poengsum er såleis 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir, skrivereiskapar og tospråklege ordbøker er tillatne.

Oppgåve 1

La n vere talet som kjem fram ved å setje tala 1, 2, ..., 4022 etter kvarandre, $n = 1234567891011\ldots40214022$.

a. Vis at n er deleleg med 3.

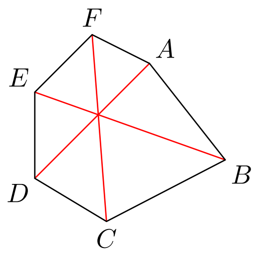
Tverrsummen av eit positivt heiltal er summen av sifra i talet. Til dømes er tverrsummen av 2536 lik 16, ettersom $2+5+3+6=16$.

b. La $a_1 = n^{2011}$, og la a_i vere tverrsummen av a_{i-1} for $i > 1$. Finn a_4.

Oppgåve 2

a. I firkanten $ABCD$ har sida AB lengd 7, BC lengd 14, CD lengd 26 og DA lengd 23. Vis at diagonalane står vinkelrett på kvarandre. Du kan anta at firkanten er konveks (alle innvendige vinklar er mindre enn 180°).

b. Diagonalane AD, BE og CF i ein konveks sekskant $ABCDEF$ skjer kvarandre i eit felles punkt. Vis at $a(ABE)\,a(CDA)\,a(EFC) = a(BCE)\,a(DEA)\,a(FAC)$, der $a(KLM)$ er arealet av trekanten KLM.



Oppgåve 3

a. Dei positive tala $a_1, a_2, \ldots$ er slik at $a_1 = 1$ og $(m+n)a_{m+n} \le a_m + a_n$ for alle positive heiltal m og n. Vis at $1/a_{200} > 4 \cdot 10^7$.

b. Finn alle funksjonar f frå dei reelle tala til dei reelle tala som er slik at $f(xy) \le \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)$ for alle reelle tal x og y.

Oppgåve 4

a. I ein by er det n gater som går frå sør til nord. Dei er nummererte frå 1 til n (frå vest til aust). Det er n vegar som går frå vest til aust – dei er også nummererte frå 1 til n (frå sør til nord). Om ein køyrer gjennom krysset mellom k-te gata og l-te vegen, må ein betale kl kroner. Kor mykje må ein minst betale for å køyre frå krysset mellom første gata og første vegen til krysset mellom n-te gata og n-te vegen? (Ein betaler òg for start- og sluttkrysset.)

b. I ei gruppe på 199 personar er kvar person ven med nøyaktig 100 andre i gruppa. Alle venskapa er gjensidige, og vi reknar ikkje ein person som ven med seg sjølv. For kva heiltal $k > 1$ finst det garantert k personar i gruppa som alle er vener med kvarandre?