Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2010–2011. *Løsninger*

Finale 10. mars 2011

Oppgave 1.

a. Differansen mellom et positivt heltall og dens tverrsum er alltid delelig med 9. Vi illustrerer bevisideen for et tresifret tall $100a + 10b + c$, der a, b og c er sifrene. Tverrsummen er $a + b + c$, og differansen dermed $99a + 9b = 9 \cdot (11a + b)$. Spesielt er denne differansen delelig med 3, og den velkjente reglen som sier at et tall er delelig med 3 hvis og bare hvis tverrsummen er det, samt tilsvarende regel for delelighet med 9, følger lett av dette.

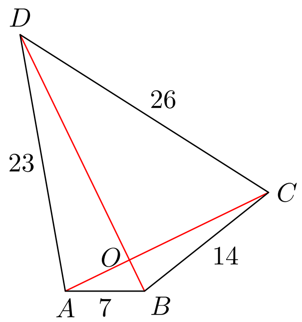
La $m = (1+2+3)+(4+5+6)+\cdots+(4018+4019+4020)+(4021+4022)$, der vi har gruppert tallene i tre og tre etterfølgende tall, med to tall til overs til slutt. Summen av tre etterfølgende heltall er alltid delelig med 3, og det er også summen av to etterfølgende heltall som ikke er delelig med 3. Så summen i hver parentes er delelig med 3 – dermed også m.

La t være tverrsummen av n. Da er $m - t$ delelig med 3, fordi $m - t = (1 + 2 + \cdots + 4021 + 4022) - (1 + 2 + \cdots + 4 + 0 + 2 + 1 + 4 + 0 + 2 + 2) = (1-1)+(2-2)+\cdots+(4021-4-0-2-1)+(4022-4-0-2-2)$ – hvert ledd i parentes er differansen mellom et tall og dets tverrsum, og dermed delelig med 3. Siden m og $m - t$ er delelig med 3, er også t det – og altså også n.

Alternativt kan vi holde regnskap med tverrsummen mer direkte. I tallene $0, 1, \ldots, 999$ forekommer hvert siffer 300 ganger (hvis vi fyller på med 0 i starten av hvert tall så alle blir tresifrede), slik at summen av alle sifrene i alle disse tallene er delelig med 3 – la oss si at summen er $3a$. Summen av alle sifrene i $0, 1, \ldots, 3999$ er dermed $4 \cdot 3a + 1000 \cdot (1 + 2 + 3) = 3 \cdot (4a + 2000)$, altså også delelig med 3. Summen av alle sifrene i $4000, 4001, \ldots, 4022$ er $23 \cdot 4 + (10 \cdot 1 + 3 \cdot 2) + (2 \cdot (1 + 2 + \ldots 9) + 1 + 2) = 102 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 45 + 3$, som også er delelig med 3. Tverrsummen av n – summen av alle sifrene i $1, 2, \ldots, 4022$ – er derfor delelig med 3, dermed også n.

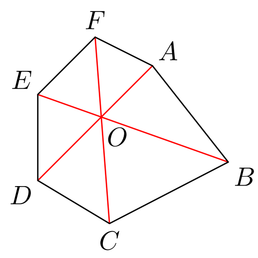
b. Tverrsummen t av et tall med k eller færre siffer oppfyller $0 < t \leq 9k < 10k$. Tallet n har færre enn $4 \cdot 4022 < 10^5$ siffer, så $n < 10^{10^5}$, og $a_1 = n^{2011} < (10^{10^5})^{10^4} = 10^{10^9}$, og a_1 har dermed færre enn 10^9 siffer og en tverrsum som er mindre enn 10^{10}. Så $a_2 < 10^{10}$, har færre enn 10 siffer og en tverrsum som er mindre enn eller lik 81. Altså er $a_3 \leq 81$ og har tverrsum mindre enn 18 (det eneste tosifrede tallet med så stor tverrsum er 99). Så $a_4 < 18$. Men et tall er delelig med 9 hvis og bare hvis tverrsummen er delelig med 9, og $a_1 = n^{2011}$ er delelig med 9 siden n er delelig med 3 – dermed er også a_2, a_3 og a_4 delelig med 9. Så $0 < a_4 < 18$ og a_4 er delelig med 9, så $a_4 = 9$.

Oppgave 2.



a. La $|KL|$ betegne lengden av linjestykket KL. Merk at $|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2$. La O være skjæringspunktet mellom diagonalene. Anta at vinkelen AOB er spiss – da er også COD spiss (de er toppvinkler). Så $|AB|^2 < |OA|^2 + |OB|^2$ (vi ville hatt likhet ved Pytagoras' læresetning hvis vinkelen hadde vært rett og motsatt ulikhet hvis vinkelen hadde vært butt) og $|CD|^2 < |OC|^2 + |OD|^2$. Dermed er $|AB|^2 + |CD|^2 < |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 + |OD|^2$. Men vinklene BOC og AOD er butte hvis AOB er spiss, så ved et tilsvarende resonnement er $|BC|^2 + |DA|^2 > |OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2 + |OD|^2$, noe som strir mot likheten nevnt i begynnelsen. Vi får en liknende motsigelse hvis AOB er butt, så den er altså rett, og diagonalene står vinkelrett på hverandre.

b. La O være det felles skjæringspunktet mellom diagonalene. La $\sin KLM$ betegne sinus av vinkelen KLM. Arealene av småtrekantene er $a(OAB) = \frac{1}{2}|OA||OB|\sin AOB$, $a(OCD) = \frac{1}{2}|OC||OD|\sin COD$, $a(OEF) = \frac{1}{2}|OE||OF|\sin EOF$, $a(OBC) = \frac{1}{2}|OB||OC|\sin BOC$, $a(ODE) = \frac{1}{2}|OD||OE|\sin DOE$ og $a(OFA) = \frac{1}{2}|OF||OA|\sin FOA$. Fordi vinklene som inngår i de tre siste arealene er lik vinklene som inngår i de tre første (toppvinkler), inngår nøyaktig samme faktorer i de tre første og de tre siste arealene, slik at $a(OAB)\,a(OCD)\,a(OEF) = a(OBC)\,a(ODE)\,a(OFA)$ $(*)$.



Videre er $a(EAB)/a(OAB) = a(EBC)/a(OBC)$ (samme forhold mellom lengdene av grunnlinjene i trekantene på venstre side som tilsvarende forhold på høyre side), $a(ACD)/a(OCD) = a(ADE)/a(ODE)$ og $a(CEF)/a(OEF) = a(CFA)/a(OFA)$. Ved å multiplisere produktet av venstresidene av disse tre likningene med venstre side av $(*)$ og produktet av høyresidene med høyre side av $(*)$, fås likningen vi skulle vise.

Oppgave 3.

a. Vi definerer en ny tallfølge $b_1, b_2, \ldots$, der $b_1 = 1$ og $b_k = \frac{1}{k}\min_{i+j=k}(b_i + b_j)$ for $k > 1$. Da er $a_1 = b_1$, og ved induksjon er $a_k \le \frac{1}{k}\min_{i+j=k}(a_i + a_j) \le \frac{1}{k}\min_{i+j=k}(b_i + b_j) = b_k$ for alle $k > 1$ – dermed er $a_k \le b_k$ for alle k.

Så skal vi vise at følgen $b_1, b_2, \ldots$ er minkende. Vi ser først at $b_2 = b_1$. La $k > 1$, og anta at $b_k = \frac{1}{k}(b_i + b_j)$, der $i + j = k$. Ved induksjon er $b_{k+1} \le \frac{1}{k+1}(b_{i+1} + b_j) \le \frac{1}{k+1}(b_i + b_j) \le \frac{1}{k}(b_i + b_j) = b_k$.

Da er $a_{200} \le b_{200} \le (b_{100} + b_{100})/200 = b_{100}/100 \le \cdots \le b_{25}/(100 \cdot 50 \cdot 25)$.

Videre er $b_{25} \le b_{24} \le (b_{12} + b_{12})/24 = b_{12}/12 \le \cdots \le b_3/(12 \cdot 6 \cdot 3)$. Og $b_3 = (b_1 + b_2)/3 = 2/3$. Hvis vi setter sammen dette, får vi $1/a_{200} \ge 1/b_{200} \ge 100 \cdot 50 \cdot 25 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 3/2 = 40500000$.

Det er også mulig å se på den opprinnelige følgen direkte og bruke ulikheten i oppgaven med disse verdiene for (m, n): $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(6,6)$, $(6,7)$, $(12,13)$, $(25,25)$, $(50,50)$, $(100,100)$. Det første paret gir $a_2 \le a_1 = 1$, det andre $a_3 \le (a_1 + a_2)/3 \le 2/3$, og etter mye regning kommer man fram til en øvre skranke for a_{200}, som gir $1/a_{200} \ge 2193750000/47 \approx 4{,}7 \cdot 10^7$.

b. Ved å la $y = 1$, får vi $f(x) \le \frac{1}{2}(f(x) + f(1))$, som gir $f(x) \le f(1)$ for alle x. Hvis $x \ne 0$, får vi, ved å la $y = 1/x$, $f(1) \le \frac{1}{2}(f(x) + f(1/x)) \le \frac{1}{2}(f(x) + f(1))$, som gir $f(x) \ge f(1)$ for alle $x \ne 0$. Så $f(x) = f(1) \ge f(0)$ for alle $x \ne 0$, det vil si at det fins et tall c som er slik at $f(x) = c$ for alle $x \ne 0$, og at $f(0) \le c$. Det er lett å sjekke at alle slike f faktisk tilfredsstiller ulikheten.

Oppgave 4.

a. Vi må innom hver diagonal vi kan trekke gjennom byen i retning nordvest – det vil si at vi for hver $d = 2, 3, \ldots, 2n$ må gjennom minst ett kryss med koordinater av form $(k, d-k)$. Det koster $k(d-k) = \frac{1}{4}d - (\frac{1}{2}d - k)^2$ kroner å kjøre innom et slikt kryss. Det blir billigst hvis vi velger k minst eller størst mulig. For $d \le n$ er det billigst med $k = 1$ eller $k = d-1$ (samme pris i begge tilfeller), og for $d > n$ er det billigst med $k = d - n$ eller $k = n$ (igjen med samme pris i begge tilfeller). Og vi kan faktisk velge en rute med en slik k for hver d, i tillegg til bare å være innom ett kryss for hver d – vi kan først kjøre østover så lenge det går, og så nordover.

Vi må da betale $1 + 2 + \cdots + n$ for kryssene i østlig retning. Så må vi betale $n(2 + \cdots + n)$ i nordlig retning – til sammen $(1 + 2 + \cdots + n - 1) + n(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{1}{2}(n-1)n + n \cdot \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n^2 + 2n - 1)$ kroner.

b. Det fins garantert to som er venner med hverandre, siden alle har 100 venner. To venner har alltid en felles tredje venn, for hvis de hadde hatt 99 andre venner hver, der ingen var venner med hverandre, måtte det ha vært minst $2 + 99 + 99 = 200$ personer i gruppa.

Det kan hende at de 199 personene kan deles inn i tre klasser – 50 i A, 50 i B og 99 i C – der alle i C er venn med alle i A og alle i B. Videre er alle i A venn med nøyaktig én i B og omvendt. Innen hver klasse er ingen venner. Da har alle nøyaktig 100 venner, som forutsatt, men uansett hvilket utvalg av fire eller flere personer vi velger, så er to av dem i samme klasse, og altså ikke venner. Så svaret er $k = 2$ og $k = 3$.