Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2010–2011. *Løsninger*

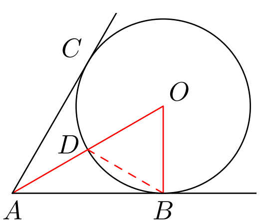
Andre runde 20. januar 2011

Oppgave 1. $2x^2 - 32x - 15 = 2(x-a)(x-b) = 2x^2 - 2(a+b)x + 2ab$ for alle reelle tall x, så $-2(a+b) = -32$, og $a+b = 16$. **16**

Oppgave 2. Summen av tall som et primtall p er delelig med, er $1+p$, som ikke er mer enn dobbelt så stort som p. Summen av tallene som andre tall mindre enn eller lik 12 – 1, 4, 6, 8, 9, 10, 12 – er delelig med, er henholdsvis 1, $1+2+4=7$, $1+2+3+6=12$, $1+2+4+8=15$, $1+3+9=13$, $1+2+5+10=18$ og $1+2+3+4+6+12=28$. Bare 12 har en sum som er mer enn dobbelt så stor som tallet selv, så det er det minste superdelelige tallet. **12**

Oppgave 3. Gi elevene nummer fra 1 til 10. Det er 9 muligheter for hvem elev nummer 1 skal arbeide sammen med. For hver av disse 9 mulighetene er det 7 muligheter for hvem den gjenværende eleven med lavest nummer skal arbeide sammen med – til sammen $9 \cdot 7$ muligheter. For hver av disse $9 \cdot 7$ mulighetene er det 5 muligheter for hvem den gjenværende eleven som nå har lavest nummer skal arbeide sammen med – til sammen $9 \cdot 7 \cdot 5$ muligheter. På samme måte får vi $9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 945$ muligheter når vi også tar hensyn til fjerde par. Det siste paret består av de to gjenværende elevene. Vi kan få alle mulige inndelinger av par ved å følge prosedyren over, og vi har heller ikke telt noen inndeling flere ganger. **945**

Oppgave 4. $a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = (ab(a/b + b/a))^2 - 2a^2b^2 = (3ab)^2 - 2a^2b^2 = 7a^2b^2 = 7 \cdot 4 = 28$. **28**

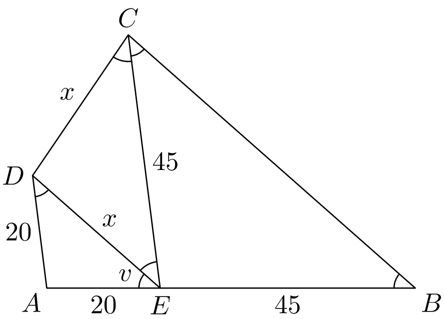


Oppgave 5. Tangeringslinja AB er vinkelrett på radien OB i sirkelen, så vinkelen ABO er rett. Det samme gjelder vinkelen ACO. De rettvinklede trekantene ABO og ACO har samme hypotenus, OA, og de har en katet hver, OB og OC, av samme lengde, så de er kongruente, og vinklene OAB og OAC er like store, så vinkelen OAB er 30°, og AOB 60°. Dermed er OA dobbelt så lang som OB (hvis vi speiler trekanten ABO om AB dannes en likesidet trekant). La D være skjæringspunktet mellom sirkelen og OA. Da er OD like lang som OB (begge er radier i sirkelen), altså halvparten så lang som OA. Men i den likebeinte trekanten BOD er O 60°, slik at den er likesidet, og også BD er halvparten så lang som OA, $420/2 = 210$. **210**

Oppgave 6. La b være antall blå kuler, r antall røde kuler og g antall gule kuler. Vi finner først antall utvalg av 3 kuler med én kule av hver farge: Det er b muligheter for den blå kula. For hver av disse, er det r muligheter for den røde, til sammen br mulige utvalg, og for hver av disse igjen g muligheter for den gule – til sammen brg utvalg. Hvis vi også tar hensyn til at det er 6 mulige rekkefølger kulene av hver farge trekkes i, får vi $6brg$ like sannsynlige utvalg der alle kulene har forskjellig farge. Totalt fins det, ved et tilsvarende resonnement, $10 \cdot 9 \cdot 8$ like sannsynlige utvalg av tre kuler. Sannsynligheten for å trekke tre kuler som alle har forskjellig farge, er $3/10 = 6brg/(10 \cdot 9 \cdot 8)$, som gir $brg = 36$. Vi må finne tre positive heltall med sum 10 og produkt $36 = 2^2 3^2$, og ved å prøve seg fram med de mulige tallene – 1, 2, 3, 4, 6 – finner man at eneste mulighet er 3, 3, 4. Siden det er flest gule kuler, er det 4 av dem. **4**

Oppgave 7. $(x+x^2+x^3+x^4+x^5)(x-1) = x^6-x = (x^6-10x+9)+(9x-9) = 9(x-1)$. Ved å dividere med $x-1$, får vi $x+x^2+x^3+x^4+x^5 = 9$. **9**

Oppgave 8. $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ og $(n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$ for alle heltall n, så alle oddetall og alle tall delelig med 4 kan skrives som differansen mellom to kvadrattall. På den andre siden er differansen mellom kvadratene av et oddetall og et partall odde, mens differansen mellom kvadratene av to partall, $(2k)^2 - (2l)^2 = 4(k^2 - l^2)$, eller mellom kvadratene av to oddetall, $(2k+1)^2 - (2l+1)^2 = 4(k^2 - l^2 + k - l)$, delelig med 4, så det fins ikke andre slike tall. Det er 500 positive oddetall mindre enn 1000 og 249 positive tall delelig med 4 som er mindre enn 1000 – til sammen 749. .... **749**



Oppgave 9. Trekantene DAE og CEB er formlike på grunn av de parallelle linjene. Fordi DAE er likebeint, er også CEB likebeint, og BE og CE har lengde $65 - 20 = 45$. La v være størrelsen av de to like vinklene AED og ADE. Da er vinklene EAD og BEC $180° - 2v$. Vinkelen DEC er $180° - v - (180° - 2v) = v$. Det er oppgitt at CD og DE er like lange, slik at også trekanten CDE er likebeint med to vinkler lik v – og trekanten CDE er også formlik med de to nevnte trekantene. La x være lengden av CD. Formlikhet av DAE og CDE gir $20/x = x/45$, $x^2 = 20 \cdot 45$, $x = 30$. **30**

Oppgave 10. Hvis Arne og Berit henholdsvis har (a, b) poeng, er poengsummene etter neste parti $(a+b, b)$, $(a, a+b)$ eller (a, b). I alle tilfellene bevares største felles divisor av poengsummene, som er 1, siden de startet på stillingen $(1, 1)$. Når vinneren har 10 poeng, har derfor taperen 1, 3, 7 eller 9 poeng. Alle disse er mulige poengsummer for taperen – 1 hvis ni partier på rad tapes, 3 hvis taperen først vinner to partier og så taper tre, 7 hvis taperen først taper to, så vinner to, så taper ett, og 9 hvis taperen vinner åtte partier og så taper ett. **20**

Fasit

1		**16**	6		**4**
2		**12**	7		**9**
3		**945**	8		**749**
4		**28**	9		**30**
5		**210**	10		**20**

Hvis denne sida kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.