Bokmål

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2011–2012

Finale 8. mars 2012

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (åtte punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. Begynn på nytt ark for hver oppgave.

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

Oppgave 1

a. Berit har 11 tjuekroner, 14 tikroner og 12 femkroner. En veksleautomat kan veksle tre tikroner til én tjuekrone og to femkroner, og omvendt. Den kan også veksle to tjuekroner til tre tikroner og to femkroner, og omvendt.

(i) Kan Berit få likt antall tjuekroner og tikroner, men ingen femkroner?

(ii) Kan hun få likt antall tjuekroner, tikroner og femkroner?

b. Hvert heltall er malt hvitt eller svart, slik at hvis m er hvitt så er $m+20$ også hvitt, og hvis k er svart så er $k+35$ også svart. For hvilke n kan eksakt n av tallene 1, 2, …, 50 være hvite?

Oppgave 2

a. To sirkler S_1 og S_2 ligger slik at de ikke overlapper hverandre, hverken helt eller delvis. De har sentre i henholdsvis O_1 og O_2. Videre er L_1 og M_1 forskjellige punkt på S_1 slik at O_2L_1 og O_2M_1 tangerer S_1, og på samme måte er L_2 og M_2 forskjellige punkt på S_2 slik at O_1L_2 og O_1M_2 tangerer S_2. Vis at det finnes nøyaktig én sirkel som tangerer de fire linjestykkene O_2L_1, O_2M_1, O_1L_2 og O_1M_2.

b. Fire sirkler S_1, S_2, S_3 og S_4 er plassert slik at ingen av dem overlapper hverandre, hverken helt eller delvis. De har sentre i henholdsvis O_1, O_2, O_3 og O_4. For hvert par (S_i, S_j) av sirkler, med $1 \le i < j \le 4$, betrakter vi sirkelen S_{ij} som i del **a**. Sirkelen S_{ij} har radius R_{ij}. Vis at

$$\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{34}} + \frac{1}{R_{14}} = 2\left(\frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{24}}\right).$$

Oppgave 3

a. Finn de tre siste sifrene i produktet $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2011$.

b. Hvilke positive heltall m er slik at $k^m - 1$ er delelig med 2^m for alle oddetall $k \geq 3$?

Oppgave 4

a. To positive tall x og y er gitt. Vis at

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^3 + \left(1 + \frac{y}{x}\right)^3 \geq 16.$$

b. Positive tall b_1, b_2, $\ldots$, b_n er gitt slik at

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq 10.$$

Videre er $a_1 = b_1$ og $a_m = sa_{m-1} + b_m$ for $m > 1$, der $0 \leq s < 1$. Vis at

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq \frac{100}{1 - s^2}.$$