Nynorsk

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2011–2012

Finale 8. mars 2012

I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (åtte punkt) som skal løysast på fire timar. Svara skal grunngivast og førast på eigne ark. Begynn på nytt ark for kvar oppgåve.

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Maksimal poengsum er såleis 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir, skrivereiskapar og tospråklege ordbøker er tillatne.

Oppgåve 1

a. Berit har 11 tjuekroner, 14 tikroner og 12 femkroner. Ein veksleautomat kan veksle tre tikroner til éi tjuekrone og to femkroner, og omvendt. Han kan òg veksle to tjuekroner til tre tikroner og to femkroner, og omvendt.

(i) Kan Berit få likt tal tjuekroner og tikroner men ingen femkroner?

(ii) Kan ho få likt tal tjuekroner, tikroner og femkroner?

b. Kvart heiltal er måla kvitt eller svart, slik at dersom m er kvitt så er $m + 20$ òg kvitt, og dersom k er svart er $k + 35$ òg svart. For kva verdiar av n kan eksakt n av tala 1, 2, …, 50 vere kvite?

Oppgåve 2

a. To sirklar S_1 og S_2 ligg slik at dei ikkje overlappar kvarandre, korkje heilt eller delvis. Dei har sentre i høvesvis O_1 og O_2. Vidare er L_1 og M_1 forskjellige punkt på S_1 slik at O_2L_1 og O_2M_1 tangerer S_1, og på same vis er L_2 og M_2 forskjellige punkt på S_2 slik at O_1L_2 og O_1M_2 tangerer S_2. Vis at det finst nøyaktig éin sirkel som tangerer dei fire linjestykka O_2L_1, O_2M_1, O_1L_2 og O_1M_2.

b. Fire sirklar S_1, S_2, S_3 og S_4 er plasserte slik at ingen av dei overlappar kvarandre, korkje heilt eller delvis. Dei har sentre i høvesvis O_1, O_2, O_3 og O_4. For kvart par (S_i, S_j) av sirklar, med $1 \le i < j \le 4$, betraktar vi sirkelen S_{ij} som i del **a**. Sirkelen S_{ij} har radius R_{ij}. Vis at

$$\frac{1}{R_{12}} + \frac{1}{R_{23}} + \frac{1}{R_{34}} + \frac{1}{R_{14}} = 2\left(\frac{1}{R_{13}} + \frac{1}{R_{24}}\right).$$

Oppgåve 3

a. Finn dei tre siste sifra i produktet $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2009 \cdot 2011$.

b. Kva for positive heiltal m er slik at $k^m - 1$ er deleleg med 2^m for alle oddetal $k \geq 3$?

Oppgåve 4

a. To positive tal x og y er gitt. Vis at

$$\left(1 + \frac{x}{y}\right)^3 + \left(1 + \frac{y}{x}\right)^3 \geq 16.$$

b. Positive tal $b_1, b_2, \ldots, b_n$ er gitt slik at

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq 10.$$

Vidare er $a_1 = b_1$ og $a_m = sa_{m-1} + b_m$ for $m > 1$, der $0 \leq s < 1$. Vis at

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq \frac{100}{1 - s^2}.$$