Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2011–2012. *Løsninger*

Finale 8. mars 2012

Oppgave 1.

a. (i) Om Berit veksler to femkroner og en tjuekrone til tre tikroner, og så to femkroner og tre tikroner til to tjuekroner, så er resultatet det samme som om hun veksler fire femkroner til en tjuekrone. (Prosessen krever at hun har en tjuekrone i tillegg, men slik er det jo her.) Gjør hun dette tre ganger, har hun fått vekslet sine tolv femkroner til tre tjuekroner, og ender opp med 14 tjuekroner og (fortsatt) 14 tikroner.

(ii) Hver gang Berit veksler er pengebeløpet uforandret. Hun har i alt 420 kroner, og trenger derfor å veksle til $420/(5+10+20) = 12$ mynter av hver av de tre sortene. Når hun veksler, vil hennes beholdning av tikroner øke eller minke med tre. I alt kan hun bare endre beholdningen av tikroner med et heltallig multiplum av tre tikroner. Hun starter med 14 tikroner, og kan dermed ikke ende opp med 12 tikroner.

b. Vi ønsker å vise at to tall m og $m+5$ må ha samme farge. Anta først at m er farget hvitt og $m+5$ svart. Siden m er hvitt, må $m+20$ og $m+40$ også være hvite. Men siden $m+5$ er svart, må også $(m+5)+35 = m+40$ være svart, som er en selvmotsigelse. Anta nå at m er svart og $m+5$ hvitt. Da må $m+105 = m+3\cdot 35 = (m+5)+5\cdot 20$ både være svart og hvitt, som igjen er en selvmotsigelse. Dette viser at m og $m+5$ må ha samme farge. Motsatt vil kravene i oppgaven være oppfylt når m og $m+5$ alltid har samme farge.

Vi deler nå tallene fra 1 til 50 inn i fem grupper. Gruppe k $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ består av alle tall som har rest lik k når tallet deles på 5. I forrige avsnitt beviste vi at alle tall innenfor en slik gruppe må ha samme farge, men gruppene kan fargelegges uavhengig av hverandre. Så enten 0, 10, 20, 30, 40 eller 50 av tallene kan være hvite.

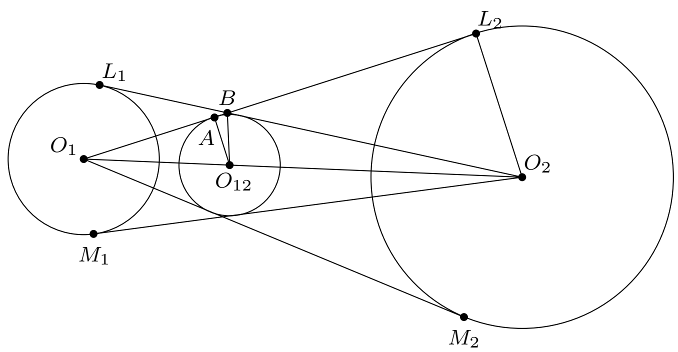
Oppgave 2.

a. Husk at vinkelhalveringsstrålen til en vinkel består av punkter som ligger like langt fra vinkelbena. Siden linjestykket O_1O_2 er en del av både halveringsstrålen til $\angle L_2O_1M_2$ og halveringsstrålen til $\angle L_1O_2M_1$ vil punktene på denne ligge like langt fra O_1L_2 som fra O_1M_2 og like langt fra O_2L_1 som fra O_2M_1.

Vi kaller skjæringa mellom O_1L_2 og O_2L_1 for B, og trekker halveringsstrålen til vinkelen O_1BO_2. Der denne skjærer O_1O_2 (O_{12} på figuren), vil avstanden til alle de fire linjestykkene O_1L_2, O_1M_2, O_2L_1 og O_2M_1 være like. Sirkelen med sentrum i dette punktet som tangerer ett av linjestykkene, vil derfor også tangere de andre, og oppgaven er løst.

Entydigheten følger av at det bare er ett skjæringspunkt mellom halveringslinjen til $\angle O_1BO_2$ og O_1O_2. Men vi må passe litt på: Man skulle tro vi kunne bruke den andre vinkelhalveringslinjen i B, altså den som halverer $\angle O_1BL_1$. I figuren, der $R_1 < R_2$, vil denne møte forlengelsen av O_1O_2 til venstre for O_1. Men en sirkel med sentrum der kan ikke tangere linje*stykket* O_2L_2, fordi tangeringspunktet til forlengelsen av linjestykket måtte ligge til venstre for L_1. Av tilsvarende grunner ser vi at det ikke er aktuelt å søke en sirkel med sentrum på den andre halveringslinjen mellom forlengelsene av O_1L_2 og O_1M_2, det vil si på normalen til O_1O_2 gjennom O_1.

Merk: Hvis vi bytter om punktene L_2 og M_2 holder fortsatt argumentet, men punktet B havner utenfor figuren vår, og vi må forlenge noen linjer for å finne det.



b. Med referanse til figuren over finner vi to likeformede trekanter O_1AO_{12} og $O_1L_2O_2$. Det gir $AO_{12} : L_2O_2 = O_1O_{12} : O_1O_2$, eller

$$\frac{R_{12}}{R_2} = \frac{O_1O_{12}}{O_1O_2}.$$

På samme måte får vi
$$\frac{R_{12}}{R_1} = \frac{O_2O_{12}}{O_1O_2},$$
og legger vi de to sammen, får vi
$$\frac{R_{12}}{R_1} + \frac{R_{12}}{R_2} = 1,$$
som vi like godt kan skrive
$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$
Tilsvarende gjelder for alle par av sirkler S_i, S_j, altså
$$\frac{1}{R_{ij}} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j}.$$
Setter vi dette inn i formelen som skal vises, blir den opplagt.

Oppgave 3.

a. Produktet er delelig med 125, siden både 5 og 25 er blant faktorene. Siden også 1000 er delelig med 125, må tallet representert ved de tre siste sifrene i produktet være delelig med 125. Det må også være et oddetall, siden det bare er odde faktorer i produktet. Så de tre siste sifrene er enten 125, 375, 625 eller 875. Disse fire tallene gir rest lik henholdsvis 5, 7, 1 og 3 etter divisjon med 8.

Vi deler nå opp produktet slik:
$$1 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11) \cdot (13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19) \cdot \cdots \cdot (2005 \cdot 2007 \cdot 2009 \cdot 2011)$$
Uttrykket i hver parentes kan skrives
$$(8n-3) \cdot (8n-1) \cdot (8n+1) \cdot (8n+3) = (64n^2 - 9) \cdot (64n^2 - 1)$$
som gir rest 1 etter divisjon med 8. Da gjelder dette også for produktet av alle parentesene, og vi står igjen med rest 3 når de første to faktorene tas med. De tre siste sifrene i produktet må derfor være 875.

b. Vi ser først at m kan være 1, 2 eller 4.

For $m = 1$ er dette opplagt.

For $m = 2$ likeså, siden $(2j+1)^2 - 1 = 4j^2 + 4j$ er delelig med 4.

For $m = 4$ ser vi at $(2j+1)^4 - 1 = 16j^4 + 4 \cdot 8j^3 + 6 \cdot 4j^2 + 4 \cdot 2j = 16j^4 + 32j^3 + 8j(3j+1)$ er delelig med 16 (siden en av faktorene j, $3j+1$ i det siste leddet er et partall.)

Ingen odde $m \geq 3$ passer, for vi kan velge $k = 2^m - 1 \equiv -1 \bmod 2^m$, som gir $k^m \equiv -1 \not\equiv 1 \bmod 2^m$.

Ingen partall $m \geq 6$ passer heller: La nemlig $k = 2^{m/2} + 1$, som gir $k^m \equiv m \cdot 2^{m/2} + 1$. Men $m \cdot 2^{m/2}$ er ikke delelig med 2^m, fordi $m < 2^{m/2}$ når $m \geq 6$.

Alternativ løsning: Vi vil beregne største j slik at $3^m - 1$ er delelig med 2^j, betegnet ved $\operatorname{ord}_2(3^m - 1)$. Anta m er et partall, dvs. $m = 2n$. Da er

$$3^m - 1 = 3^{2n} - 1^2 = (3^n - 1)(3^n + 1).$$

Merk at modulo 8 er

$$3^n + 1 \equiv \begin{cases} 2, & \text{om } n \text{ er et partall,} \\ 4, & \text{om } n \text{ er et oddetall.} \end{cases}$$

Derfor vil

$$\operatorname{ord}_2(3^m - 1) = \begin{cases} \operatorname{ord}_2(3^n - 1) + 1, & \text{om } n \text{ er et partall,} \\ \operatorname{ord}_2(3^n - 1) + 2, & \text{om } n \text{ er et oddetall.} \end{cases}$$

La $m = 2^a \cdot b$ hvor $a \geq 0$ og b er et oddetall. Dersom $a \geq 1$, vil

$$\operatorname{ord}_2(3^m - 1) = \operatorname{ord}_2(3^b - 1) + a + 1.$$

Siden b er odde, er $3^b - 1 \equiv 3 - 1 = 2$ modulo 8, og derfor $\operatorname{ord}_2(3^b - 1) = 1$. Dermed får vi

$$\operatorname{ord}_2(3^m - 1) = \begin{cases} 1, & \text{når } a = 0, \\ a + 2, & \text{når } a > 0. \end{cases}$$

Kravet om at 2^m skal dele $3^m - 1$ er ekvivalent med $m \leq \operatorname{ord}_2(3^m - 1)$. Med $m = 2^a b$ får vi ulikheten

$$\begin{aligned} &\text{om } a = 0: && b \leq 1 \\ &\text{om } a \geq 1: && 2^a b \leq a + 2 \end{aligned}$$

Denne likningen har opplagt ingen løsninger for $a \geq 3$, mens vi for $a \leq 2$ får $b = 1$ som eneste mulighet. Dette gir at m må være et av tallene 1, 2 eller 4.

Oppgave 4.

a. Vi ganger ut og får den ekvivalente ulikheten

$$2+3\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)+3\bigg(\Big(\frac{x}{y}\Big)^2+\Big(\frac{y}{x}\Big)^2\bigg)+\bigg(\Big(\frac{x}{y}\Big)^3+\Big(\frac{y}{x}\Big)^3\bigg)\geq 16$$

Fra $\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 \geq 0$ følger den velkjente ulikheten $a+\frac{1}{a}\geq 2$ for alle $a>0$. Bruker vi denne for $a=x/y$, $a=(x/y)^2$ og $a=(x/y)^3$ får vi

$$\begin{aligned}2+3\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)+3\bigg(\Big(\frac{x}{y}\Big)^2+\Big(\frac{y}{x}\Big)^2\bigg)+\bigg(\Big(\frac{x}{y}\Big)^3+\Big(\frac{y}{x}\Big)^3\bigg)&\\ \geq 2+3\cdot 2+3\cdot 2+2\geq 16,&\end{aligned}$$

som var det vi skulle vise.

b. Først ser vi at $a_m\geq 0$ for alle m (ved induksjon på m).

Videre er $a_m\leq a_{m-1}+b_m$, og et nytt induksjonsargument gir

$$a_m\leq c_m,\quad \text{der } c_m=b_1+\cdots+b_m.$$

For $m\geq 2$ får vi

$$\begin{aligned}a_m^2&=s^2a_{m-1}^2+2sa_{m-1}b_m+b_m^2\\&\leq s^2a_{m-1}^2+2sc_{m-1}b_m+b_m^2\\&\leq s^2a_{m-1}^2+2c_{m-1}b_m+b_m^2.\end{aligned}$$

Vi adderer likheten $a_1^2=b_1^2$ og ulikhetene over for $m=2,\ldots,n$, og får

$$\begin{aligned}a_1^2+\cdots+a_n^2&\leq s^2(a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2)+2c_1b_2+\cdots+2c_{n-1}b_n+b_1^2+\cdots+b_n^2\\&=s^2(a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2)+(b_1+\cdots+b_n)^2\\&\leq s^2(a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2+a_n^2)+10^2,\end{aligned}$$

som gir ulikheten det spørres etter.