Bokmål

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2012–2013

Finale 7. mars 2013

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (seks punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.**

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

Oppgave 1

a. Finn alle reelle tall a som er slik at ulikheten

$$3x^2 + y^2 \geq -ax(x+y)$$

holder for alle reelle tall x og y.

b. Følgen a_1, a_2, a_3, $\dots$ er definert slik at $a_1 = 1$ og

$$a_{n+1} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} + 1 \qquad \text{for } n \geq 1.$$

Vis at for hvert reelt positivt tall β kan vi finne en k slik at $a_k < \beta k$.

Oppgave 2

I en trekant T er alle vinklene mindre enn 90°, og den lengste siden har lengde s. Vis at for hvert punkt p i T kan vi velge et hjørne h i T slik at avstanden fra p til h er mindre enn eller lik $s/\sqrt{3}$.

Oppgave 3

Et primtall $p \geq 5$ er gitt. Skriv

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{p-3}{p-1} = \frac{a}{b}$$

for naturlige tall a og b. Vis at p går opp i a.

Oppgave 4

a. Et ordnet firetuppel (P_1, P_2, P_3, P_4) av hjørner i en regulær 2013-kant kalles *kryssende* dersom de fire hjørnene alle er forskjellige og linjestykket fra P_1 til P_2 skjærer linjestykket fra P_3 til P_4. Hvor mange kryssende firetupler finnes det i 2013-kanten?

b. I alt $a \cdot b \cdot c$ terningformede småesker er satt sammen til en $a \times b \times c$ rektangulær stabel, der $a, b, c \geq 2$. En bie befinner seg inne i en av småeskene. Den kan fly fra en småeske til en annen gjennom et hull i veggen, men ikke gjennom kanter eller hjørner. Den kan heller ikke fly utenfor stabelen. For hvilke tripler (a, b, c) er det mulig for bien å fly innom alle småeskene nøyaktig én gang, og ende opp i småesken der den startet?