Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2012–2013. *Løsninger*

Første runde 8. november 2012

Oppgave 1. $3^6 \cdot 9^{12} = (3^2)^3 \cdot 9^{12} = 9^3 \cdot 9^{12} = 9^{3+12} = 9^{15}$. . . . . **B**

Oppgave 2. Skriv P, R og L for hjemmene til Per, Ragnar og Lars. De gitte opplysningene kan skrives $|PR| = 250\,\text{m}$ og $|RL| = 300\,\text{m}$. Lengden av en side i en trekant er ikke større enn summen av de to andre lengdene, så $|PL| \le |PR| + |RL| = 550\,\text{m}$. Denne avstanden er mulig hvis de tre bor på rett linje med Ragnar mellom de to andre. I tillegg er $|RL| \le |RP| + |PL|$, slik at $|PL| \ge |RL| - |RP| = 50\,\text{m}$. Denne avstanden er også mulig om de bor på en rett linje, denne gangen med Lars mellom de to andre. Alle andre avstander mellom disse to yttergrensene kan oppnås ved å variere vinkelen PRL mellom $0°$ og $180°$. . . . . **C**

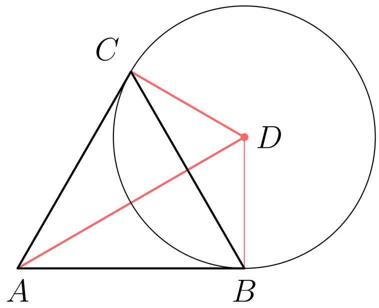
Oppgave 3. Siste siffer er gitt når de to første sifrene er kjent. Når første siffer er s kan andre siffer være hva som helst mellom 0 og s, i alt $s + 1$ muligheter. Legger vi sammen antall muligheter for første siffer lik 1, 2, 3, …, 9, får vi i alt $2 + 3 + 4 + \cdots + 10 = 54$ muligheter. . . . . **D**

Oppgave 4. Primtallsfaktoriseringen av 360 er $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. De forskjellige primtallsfaktorene er 2, 3 og 5. . . . . **B**

Oppgave 5. Skriv L, K og S for alderen til Lars, Kari og Stian i år. De gitte opplysningene kan skrives $L = 2K$, $S = 3K$ og $S - 5 = 2(L - 5) = 2L - 10$. Om vi setter inn L og S fra de to første opplysningene i den tredje får vi $3K - 5 = 4K - 10$, som har løsning $K = 5$. Summen av aldrene er $K + 2K + 3K = 6K = 30$ år. . . . . **A**

Oppgave 6. Primtallsfaktoriseringen av 784 er $784 = 2^4 \cdot 7^2$. For at n skal gå opp i 784, må $n = 2^i \cdot 7^j$ med $0 \le i \le 4$ og $0 \le j \le 2$. Det gir 5 muligheter for i og 3 muligheter for j, i alt $5 \cdot 3 = 15$ muligheter. . . . . **D**

Oppgave 7. Om D er sentrum i sirkelen, så har trekanten ADC vinkler 30°, 60° og 90°. Sidekantene i en slik trekant har proporsjoner $1 : \sqrt{3} : 2$. Fordi $CD = 1$, er $AC = \sqrt{3}$. . . . . . **B**



Oppgave 8. I hvert terningkast er sannsynligheten for oddetall og partall like stor, så vi kan løse dette ved enkel opptelling av mulighetene. Det er i alt $2^3 = 8$ mulige utfall av tre terningkast, når vi bare ser på pariteten av hvert kast. Gitt at vi får ett oddetall og to partall, er det tre mulige valg for hvilket terningkast som gir oddetall. Sannsynligheten er derfor 3/8. . . . . **B**

Oppgave 9. Blant $A = 0{,}3$, $C = 0{,}333\ldots$ og $D = 0{,}25$ er $C = 1/3$ størst. I tillegg er $E = 240/723 < 240/720 = 1/3 = C$, og til slutt er $C^2 = 1/9 = 0{,}111\ldots > B^2$, så $C > B$. C er altså størst. . . . . **C**

Oppgave 10. I figuren slik den er gitt i oppgaven er småtrekantene oppe til venstre og nede til høyre likebente, siden de har vinkler 45°, 45° og 90°. Dermed er hypotenusen i trekanten delt i tre like store deler, slik at sidekanten i kvadratet er $\sqrt{2}/3$, og arealet er $(\sqrt{2}/3)^2 = 2/9$. . . . . **A**

Oppgave 11. De positive tresifrede tallene er 100, 101, . . . , 999. Middelverdien av 100 og 999 er $\frac{1}{2}(100 + 999) = 549{,}5$, Det samme gjelder middelverdien av 101 og 998, middelverdien av 102 og 997 og så videre. Så middelverdien av alle tallene er 549,5. . . . . **B**

Oppgave 12. Skriv tre påfølgende tall som $n - 1$, n og $n + 1$. Summen av disse tre er $3n$. Dette er et primtall bare når $n = 1$, som gir primtallet 3. . **B**

Oppgave 13. De to kvartsirklene må være like store. Skriv r for radien, målt i meter. A og B er endepunktene av hypotenusen i en rettvinklet trekant med kateter $2r$ og $2r + 20$. Fra Pytagoras får vi $(2r)^2 + (2r + 20)^2 = 10000$. Etter litt forenkling får vi $r^2 + 10r = 1200$. Her kan vi komplettere kvadratene og få $(r + 5)^2 = 1225 = 35^2$. Siden r er positiv, må $r = 30$. Avstanden Karl Erik sykler, er $\pi r + 20 = 30\pi + 20$ meter. . . . . **B**

Oppgave 14. Med k sorte sokker av i alt $n = 29 + k$ sokker er sjansen for å få to sorte sokker lik

$$\frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} = \frac{k(k-1)}{(29+k)(28+k)} = \frac{1}{30}.$$

Skriv dette om til $30k(k-1) = (29+k)(28+k)$. Opprydning leder til $29k^2 - 87k = 28 \cdot 29$, som kan divideres med 29 og gi $k^2 - 3k = 28$. Eneste positive løsning til denne ligningen er $k = 7$. . . . . **C**

Oppgave 15. På den ene siden er

$$\begin{aligned} m &> 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \overbrace{8 \cdot \cdots \cdot 8}^{8 \text{ ganger}} \cdot \overbrace{16 \cdot \cdots \cdot 16}^{16 \text{ ganger}} \cdot 32 \\ &= 2^2 \cdot 4^4 \cdot 8^8 \cdot 16^{16} \cdot 32 = 2^{2+2\cdot4+3\cdot8+4\cdot16+5} = 2^{103} > 2^{100}, \end{aligned}$$

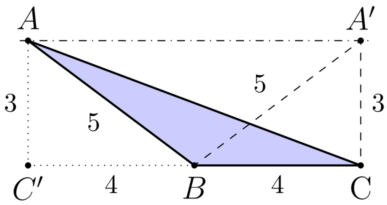
og på den andre siden er

$$\begin{aligned} m &< 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \overbrace{16 \cdot \cdots \cdot 16}^{8 \text{ ganger}} \cdot \overbrace{32 \cdot \cdots \cdot 32}^{16 \text{ ganger}} \\ &= 2 \cdot 4^2 \cdot 8^4 \cdot 16^8 \cdot 32^{16} = 2^{1+2\cdot2+3\cdot4+4\cdot8+5\cdot16} = 2^{129} < 2^{130}. \end{aligned}$$

. . . . **D**

Oppgave 16. Trekantene ABC, AFE og CGE er alle likeformet, og lengden av hypotenusen i de tre står i forhold $1 : y : 1 - y$, hvor $y = x/(1+x)$. Dermed er forholdet mellom de tre arealene $1 : y^2 : (1-y)^2$. Trekanten ABC har areal $\frac{1}{2}$, så AFE og CGE har areal $\frac{1}{2}y^2$ og $\frac{1}{2}(1-y)^2$. Summen av de to arealene er $\frac{1}{2}(x^2/(1+x)^2 + 1/(1+x)^2)$. . . . . **A**

Oppgave 17. Tallet n kan ikke være 2000 eller større, for da vil andre siffer være null, slik at også produktet af sifrene blir null, mens summen ikke er det. Vi forsøker oss med et tall med sifre 1, a, b, c i rekkefølge. De må tilfredsstille ligningen $abc = 1 + a + b + c$. Med $a = b = c = 2$ blir $abc > 1 + a + b + c$, og hver gang vi øker en av variablene vil abc øke mer enn $1 + a + b + c$, så ulikheten bare øker. Derfor må minst ett til av sifrene være 1. La oss si $c = 1$. Da må $ab = 2 + a + b$. Hvis $a = b = 3$ blir $ab > 2 + a + b$, og et argument likt det foran viser at minst en av a, b – la oss si b – høyst kan være lik 2. Setter vi $b = 1$, må vi ha $a = 3 + a$, som er umulig. Setter vi $b = 2$, må vi ha $2a = 4 + a$, så $a = 4$. Tallet n er 1421, og summen av sifrene er 8. . . . . **E**



Oppgave 18. Høyden fra A må være 3, fordi grunnlinjen BC har lengde 4 og arealet er 6. Sammen med kravet $AB = 5$ gir dette to mulige plasseringer av A på linjen parallell med BC og avstand 3. Den ene kandidaten, A' i figuren, er utelukket fordi $CA > 3$, og fordi en trekant med sider 3, 4 og 5 er rettvinklet. Dermed må plasseringen bli i A som vist. CA blir hypotenus i en trekant med kateter $4 + 4 = 8$ og 3, så $CA = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$. . . . . **D**

Oppgave 19. Siste siffer i et produkt avhenger bare av siste siffer i faktorene. Dette gjør det enkelt å regne ut siste siffer i 2^n for alle n: For $n = 1, 2, \ldots$ blir resultatet $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \ldots$ der mønsteret 2, 4, 8, 6 gjentar seg i det uendelige. Siste siffer i 2012^{2012} er det samme som i 2^{2012}, som er det samme som i 2^4, altså 6. Det samme skjer for 3^n, med mønsteret 3, 9, 7, 1. Siste siffer i 503^{503} er det samme som i 3^{503}, som er det samme som i 3^3, altså 7. Produktet av tall med siste siffer 6 vil selv ha siste siffer 6, og det gjelder da også 1006^{1006}. Man finner siste siffer i en sum ut fra siste siffer i summandene ved å addere sistesifrene og ta siste siffer i resultatet, så siste siffer i summen det spørres etter er lik siste siffer i $1 + 4 + 6 + 7 + 6 + 6 = 30$, det vil si 0. **A**

Oppgave 20. Én løsning er $x = 0$. Andre løsninger må oppfylle $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2010} + x^{2011} = 0$. Etter at to og to ledd slås sammen blir dette $(1 + x) + (1 + x)x^2 + (1 + x)x^4 + \cdots + (1 + x)x^{2010} = 0$. Dette viser at også $x = -1$ er en løsning. For å sjekke om det finnes enda flere løsninger kan vi dividere med $1 + x$, og få $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2010} = 0$. Men denne ligningen har ingen reelle løsninger, fordi alle leddene er positive. . . . . **B**

Fasit

1		B	11		B
2		C	12		B
3		D	13		B
4		B	14		C
5		A	15		D
6		D	16		A
7		B	17		E
8		B	18		D
9		C	19		A
10		A	20		B

Hvis denne siden kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.