# Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2012–2013. *Løsninger*

Andre runde 17. januar 2013

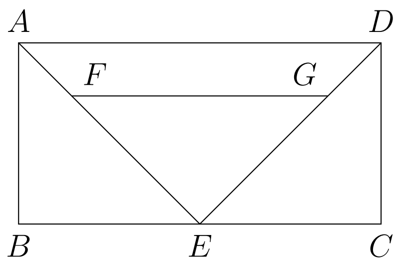
**Oppgave 1.** $899 = 30^2 - 1^2 = (30-1)(30+1) = 29 \cdot 31$, så 31 er den største primfaktoren. .......................................................... **31**

**Oppgave 2.** Et rektangel spesifiseres ved å velge to av sju horisontale linjer og to av sju vertikale linjer. Hvert valg kan gjøres på $7 \cdot 6/2 = 21$ måter, som gir i alt $21^2 = 441$ rektangler. .......................................... **441**

**Oppgave 3.** Vi finner summen av koeffisientene ved å sette inn $x = 1$ i polynomet, med resultat $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 104/(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 103) = 104$. .... **104**

**Oppgave 4.** I første omgang ser vi ikke forskjell på oddetallene, og skriver 1 for hvert oddetall. Likedan skriver vi 2 for hvert partall. Vi kan ikke ha to oddetall først eller sist, og vi kan heller ikke ha alle tre ved siden av hverandre, men ellers er «alt lov». Så forbudte konfigurasjoner er 111222, 112122, 112212 og 112221, samt speilbildene av disse, pluss 211122 og 221112, i alt 10 forbudte konfigurasjoner. For hver av disse kan de tre oddetallene plasseres på $3! = 6$ måter, og likedan med partallene, i alt $6 \times 6 = 36$ måter. Det er altså $10 \cdot 36 = 360$ forbudte permutasjoner. Antall tillatte permutasjoner blir $6! - 360 = 720 - 360 = 360$. ......................... **360**

**Oppgave 5.** Trekantene $FEG$ og $AED$ blir likeformede, og forholdet mellom arealene blir kvadratet av det lineære størrelsesforholdet mellom de to. Det betyr at hver side i $FEG$ må være $1/\sqrt{2}$ ganger tilsvarende sidekant i $AED$. Ved Pytagoras finner vi $EA = \sqrt{2} \cdot 120$, så $EF = 1/\sqrt{2} \cdot EA = 120$. ..................................... **120**




**Oppgave 6.** De heltallige multiplene mindre enn 2013 av et vilkårlig positivt heltall $n$ er $n$, $2n$, $3n$, og så videre opp til $kn$, der $k$ er $2012/n$ avrundet ned til nærmeste heltall. Vi skriver $\lfloor 2012/n \rfloor$ for denne størrelsen, som altså er antallet slike multipler.

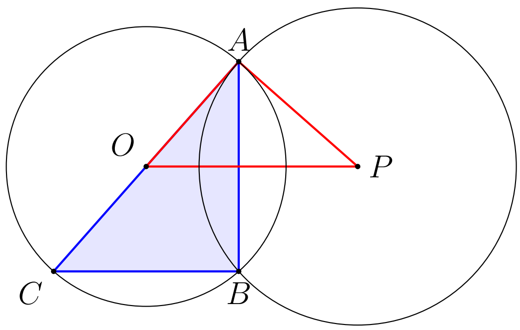
Det er $\lfloor 2012/2 \rfloor = 1006$ partall mindre enn 2013, $\lfloor 2012/3 \rfloor = 670$ tall som er delelig med 3, og $\lfloor 2012/5 \rfloor = 402$ tall som er delelig med 5. Det skulle bli $1006 + 670 + 402 = 2078$ tall som er delelig med en av de tre faktorene 2, 3 og 5.

Det er åpenbart for mye, og grunnen er at vi har telt tall som er delelig med to av faktorene dobbelt: Det vil si alle tall som er delelig med $2 \times 3 = 6$ ($\lfloor 2012/6 \rfloor = 335$ tall), eller med $2 \times 5 = 10$ ($\lfloor 2012/10 \rfloor = 201$ tall), eller med $3 \times 5 = 15$ ($\lfloor 2012/15 \rfloor = 134$ tall): I alt $335 + 201 + 134 = 670$ tall er telt to ganger, så vi står igjen med $2078 - 670 = 1408$ tall.

Men det er *heller ikke rett*, for noen tall er delelig med $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, i alt $\lfloor 2012/30 \rfloor = 67$ tall. Disse har vi telt tre ganger, så har vi overkompensert og trukket dem fra tre ganger, så vi må legge dem til igjen: I alt $1408 + 67 = 1475$ tall mindre enn 2013 er delelig med enten 2, 3 eller 5.

Vi er interessert i de som *ikke* er delelig med noen av disse, og de er $2012 - 1475 = 537$ i tallet. (Vi har helt sett bort fra delelighet med 4, for et tall som ikke er delelig med 2 er heller ikke delelig med 4.) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **537**

**Oppgave 7.** Vi legger merke til at $(10\sqrt{7})^2 + 30^2 = 700 + 900 = 1600 = 40^2$, slik at trekanten $OAP$ er rettvinklet. Det følger at vinklene $OPA$ og $CAB$ er like store, siden vinkelbena står parvis vinkelrett på hverandre.




Linjestykket $CB$ er parallelt med $OP$. Spesielt er vinkelen $ABC$ rett. Det følger at trekantene $ABC$ og $PAO$ er likeformede, for begge har en rett vinkel, og like vinkler $OPA$ og $CAB$. Vi får $BC/AO = CA/OP$, altså $BC = AO \cdot CA/OP = 10\sqrt{7} \cdot 20\sqrt{7}/40 = 35$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **35**

**Oppgave 8.** Rekursjonsligningen kan skrives $x_{n+2} - 3x_{n+1} = 3(x_{n+1} - 3x_n)$, slik at følgen med elementer $x_{n+1} - 3x_n$ vokser geometrisk med faktor 3. Siden $x_1 - 3x_0 = 9 = 3^2$, får vi $x_{n+1} - 3x_n = 3^{n+2}$. Divisjon med $3^{n+1}$ gir $3^{-(n+1)}x_{n+1} - 3^{-n}x_n = 3$. Adderer vi disse ligningene for $n = 0, 1, \ldots, k-1$ får vi $3^{-k}x_k - x_0 = 3k$, slik at $x_k = 3^k(3 + 3k) = 3^{k+1}(k+1)$. Nå er $2013 = 3 \cdot 671$, og 671 er ikke delelig med 3, så $x_k$ er delelig med 2013 hvis og bare hvis $k + 1$ er delelig med 671. Det skjer for første gang når $k = 670$. **670**

**Oppgave 9.** Oktaederet består av to pyramider der grunnflaten er et kvadrat med areal $(\sqrt{6})^2 = 6$. Legg et vertikalt snitt gjennom toppen av pyramiden og midten av to motstående sider av grunnflaten. Dette snittet deler den likesidete trekanten i to, og hver halvpart har sider med lengder $\sqrt{6}$, $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ og $\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{6} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Så snittflaten er en likebent trekant med grunnlinje $\sqrt{6}$ og to sidekanter av lengde $\frac{3}{2}\sqrt{2}$. Høyden i denne trekanten, og derfor av pyramiden, blir kvadratroten av $(\frac{3}{2}\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{2}\sqrt{6})^2 = 3$. Volumet av pyramiden blir derfor $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$. Volumet av oktaederet blir dobbelt så stort, og kvadratet av volumet blir $16 \cdot 3 = 48$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **48**

**Oppgave 10.** Multipliser ut produktet $(2a+1)(2b+1)(2c+1) = 8abc + 4ab + 4bc + 4ca + 2a + 2b + 2c + 1 = 2 \cdot 1006 + 1 = 2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Siden alle faktorene til venstre er 3 eller større, og fordi 3, 11 og 61 er primtall, må $2a+1$, $2b+1$ og $2c+1$ være tallene 3, 11 og 61, ikke nødvendigvis i den rekkefølgen. Rekkefølgen spiller heldigvis ingen rolle for summen, som blir $a + b + c = 1 + 5 + 30 = 36$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **36**

## Fasit

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **31** | 6 | | **537** |
| 2 | | **441** | 7 | | **35** |
| 3 | | **104** | 8 | | **670** |
| 4 | | **360** | 9 | | **48** |
| 5 | | **120** | 10 | | **36** |

Hvis denne sida kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.