Bokmål

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2013–2014

Finale 4. mars 2014

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (seks punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.**

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

Oppgave 1

a. Anta at $x, y \geq 0$. Vis at

$$x^2 + y^2 + 1 \leq \sqrt{(x^3 + y + 1)(y^3 + x + 1)}.$$

b. Finn alle funksjoner $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ som er slik at

$$(1 + y)f(x) - (1 + x)f(y) = yf(x/y) - xf(y/x)$$

for alle reelle $x, y \neq 0$, og som har verdiene $f(1) = 32$ og $f(-1) = -4$.

Oppgave 2

Punktene P og Q ligger på sidene BC og CD i parallellogrammet $ABCD$ slik at $BP = QD$. Vis at skjæringspunktet mellom linjene BQ og DP ligger på vinkelhalveringslinjen til $\angle BAD$.

Oppgave 3

a. En gresshoppe hopper rundt på et rutenett. Fra punktet med koordinater (a, b) kan den hoppe til enten $(a + 1, b)$, $(a + 2, b)$, $(a + 1, b + 1)$, $(a, b + 2)$ eller $(a, b + 1)$. Gresshoppen starter i $(0, 0)$. På hvor mange måter kan den nå linjen $x + y = 2014$?

b. Ni punkter er plassert på en sirkel. Vis at det er mulig å farge de 36 kordene som forbinder dem ved hjelp av fire farger slik at for ethvert utvalg av fire punkter er hver av de fire fargene brukt for minst én av de seks kordene som forbinder de utvalgte punktene.

Oppgave 4

Finn alle tripler (a, b, c) av positive heltall som er slik at $\dfrac{32a + 3b + 48c}{4abc}$ også er et heltall.