# Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2013–2014. *Løsninger*

Finale 4. mars 2014

**Oppgave 1.**

**a.** Ulikheten er Cauchy–Schwarz' ulikhet anvendt på vektorene $(x^{3/2}, y^{1/2}, 1)$ og $(x^{1/2}, y^{3/2}, 1)$.

*Alternativt* kan man kvadrere ulikheten og skrive den på formen

$$xy(xy-1)^2 + x(x-1)^2 + y(y-1)^2 \geq 0.$$

**b.** Setter vi inn $y = 1$ i funksjonalligningen, får vi

$$2f(x) - (1+x)f(1) = f(x) - xf(1/x).$$

Setter vi i stedet inn $y = -1$ og erstatter $x$ med $-x$, får vi

$$(x-1)f(-1) = -f(x) + xf(1/x).$$

Om vi adderer de to ligningene over og rydder litt, får vi

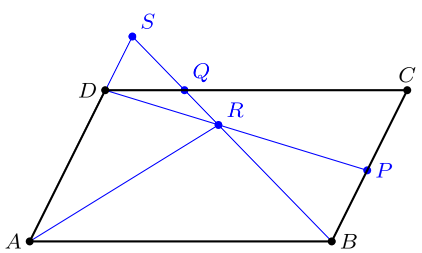
$$2f(x) = (1+x)f(1) + (1-x)f(-1) = 32(1+x) - 4(1-x) = 36x + 28,$$

og dermed

$$f(x) = 18x + 14.$$

Omvendt ser vi at funksjonen over har de oppgitte funksjonsverdiene. Videre vil *enhver* lineær funksjon $f(x) = ax + b$ oppfylle funksjonalligningen, altså

$$(1+y)(ax+b) - (1+x)(ay+b) = ax + by - (ay + bx).$$




**Oppgave 2.** La $R$ være skjæringspunktet mellom $BQ$ og $DP$, og la linjen $BQ$ skjære linjen $AD$ i $S$. Vi må da vise at linjen $AR$ er en vinkelhalveringslinje i trekanten $SAB$. Det er derfor nok å vise at $SR/BR = AS/AB$. Men siden $DS \parallel PB$, er trekantene $SRD$ og $BRP$ formlike, hvorav $SR/BR = DS/PB$. Videre er $DQ \parallel AB$, hvorav trekantene $SDQ$ og $SAB$ er formlike, og dermed har vi $DS/DQ = AS/AB$. Men da har vi

$$\frac{SR}{BR} = \frac{DS}{PB} = \frac{DS}{DQ} = \frac{AS}{AB},$$

og vi er ferdige.

**Oppgave 3.**

**a.** La $a_n$ være antall måter gresshoppen kan komme til linjen $x + y = n$ på. Så er $a_{-1} = 0$, $a_0 = 1$ og

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Rekursjonsligningen kan skrives på formen

$$a_n + a_{n-1} = 3(a_{n-1} + a_{n-2}),$$

som leder til

$$a_n + a_{n-1} = 3^n(a_0 + a_{-1}) = 3^n.$$

Men den kan også skrives

$$a_n - 3a_{n-1} = -(a_{n-1} - 3a_{n-2}),$$

som leder til

$$a_n - 3a_{n-1} = (-1)^n(a_0 - 3a_{-1}) = (-1)^n.$$

Vi får dermed

$$a_n = \frac{1}{4}\Big(a_n - 3a_{n-1} + 3(a_n + a_{n-1})\Big) = \frac{1}{4}\Big((-1)^n + 3^{n+1}\Big),$$

og spesielt

$$a_{2014} = \frac{3^{2015} + 1}{4}.$$

**b.** Gi de ni punktene navn $(x, y)$ der $x, y \in \{0, 1, 2\}$. Gi én farge til korden mellom $(x, y)$ og $(u, v)$ dersom $x = u$, en annen farge dersom $y = v$, en tredje dersom $x+y \equiv u+v \mod 3$, og en fjerde dersom $x-y \equiv u-v \mod 3$. Hvis to av dem gjelder, er $(x, y) = (u, v)$. Ellers må en av dem gjelde, for anta at ingen av de to første gjelder. Da er $u \equiv x+i \mod 3$ og $v \equiv y+j \mod 3$ med $i, j \in 1, 2$, Dersom $i \neq j$ er da $i+j \equiv 0 \mod 3$, så $u+v \equiv x+i+y+j \equiv x+y \mod 3$. Og om $i = j$ er $u - v \equiv (x + i) - (y + j) = x - y \mod 3$.

La $(x_i, y_i)$ være fire punkter ($i = 1, 2, 3, 4$). Siden $x_i$, $y_i$, $x_i + y_i$ og $x_i - y_i$ bare har tre mulige verdier hver modulo 3, må det finnes to indekser $i$ med samme verdi for $x_i$, to med samme verdi for $y_i$, og så videre, så alle fire farger forekommer blant kordene som forbinder disse fire punktene.

**Oppgave 4.** Vi skal ha $4abc \mid 32a + 3b + 48c$, som først gir $4 \mid 3b$ og derfor $4 \mid b$. Men da vil $16 \mid 4abc$, så vi ender med $16 \mid b$. Skriver vi $b = 16b'$, så skal $(a, b', c)$ være slik at

$$4ab'c \mid 2a + 3b' + 3c. \tag{1}$$

Spesielt må

$$4ab'c \leq 2a + 3b' + 3c. \tag{2}$$

Legg merke til at om $a$, $b'$ eller $c$ gjøres større, vil venstresiden i (2) øke minst 4/3 ganger så mye som høyresiden, så dersom (2) først ikke gjelder for et trippel $(a, b', c)$ så vil den heller ikke gjelde for tripler $(\bar{a}, \bar{b}', \bar{c})$ med $\bar{a} \geq a$, $\bar{b}' \geq b'$ og $\bar{c} \geq c$.

Ulikheten (2) holder *ikke* for $(a, b', c) = (1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$ eller $(2, 2, 1)$, så minst to av variablene $a$, $b'$, $c$ må være lik 1.

Om $b' = c = 1$, må $4a \leq 2a + 6$, altså $a \leq 3$. Ligning (1) blir $4a \mid 2a + 6$, som holder bare for $a = 1$ og $a = 3$.

Om $a = c = 1$, må $4b' \leq 3b' + 5$, altså $b' \leq 5$. Ligning (1) blir $4b' \mid 3b' + 5$, som holder bare for $b' = 1$ og $b' = 5$.

Om $a = b' = 1$, må $4c \leq 3c + 5$, altså $c \leq 5$. Ligning (1) blir $4c \mid 3c + 5$, som holder bare for $c = 1$ og $c = 5$.

Mulige verdier for $(a, b', c)$ er dermed $(1, 1, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(1, 5, 1)$ og $(1, 1, 5)$, så $(a, b, c)$ må være en av $(1, 16, 1)$, $(3, 16, 1)$, $(1, 80, 1)$ og $(1, 16, 5)$.