Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2013–2014. *Løsninger*

Første runde 7. november 2013

Oppgave 1. Siden 2 er et primtall, vil bare potenser av 2 gå opp i 2^{10}. Altså $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{10}$ – i alt 11 tall. .... **D**

Oppgave 2. La P og U være alderen til Petter og Ulrik nå. Opplysningene gir $P - 2 = 3(U - 2) = 3U - 6$ og $P + 2 = 2(U + 2) = 2U + 4$, som vi kan skrive om til $P = 3U - 4$ og $P = 2U + 2$. Dermed er $3U - 4 = 2U + 2$, med løsning $U = 6$. Så $P = 2 \cdot 6 + 2 = 14$, og $U + P = 20$. .... **B**

Oppgave 3. Om vi legger sammen de tre ligningene får vi $4(x + y + z) = 1$, så $x + y + z = \frac{1}{4}$. .... **D**

Oppgave 4. Vi starter ytterst. Toppvinkelen i trekanten er 90°, siden den er periferivinkelen til en diameter. Dermed er de to andre vinklene i trekanten 45°. Så de to småtrekantene i høyre og venstre side er likebente, med kateter lik sidekanten i kvadratet, og dermed lik diameteren i den lille sirkelen. Den store sirkelen har 3 ganger så stor diameter som den lille, og dermed 9 ganger arealet. .... **A**

Oppgave 5. **A** er feil – for eksempel BRBRBRH. **B** er feil – for eksempel RRRHBBB. **C** er feil – for eksempel BRBRBRH. **D** er feil – for eksempel BRBRBRH blir til BRBRBRB. .... **E**

Oppgave 6. Hvis en av de tre har fem biler, kan hver av de to andre ha høyst to biler hver, slik at de alle har ni biler til sammen. Med fordelingen 4, 3, 3 kan de ha ti biler til sammen. De kan ikke ha flere enn ti biler, for hvis ingen har flere enn fire biler og totalen er minst elleve, må minst to av dem ha fire biler, men da vil de to ha flere enn sju biler til sammen. Så det høyeste antallet biler de tre kan ha er ti. .... **C**

Oppgave 7. Alle banene har like lange langsider. De to halvsirklene i hver bane danner en sirkel med radius 1 m større enn banen innenfor, så omkretsen blir 2π m lengre. For bane fem er radien 4 m større enn for bane én, så banen blir 8π m lengre. .... **D**

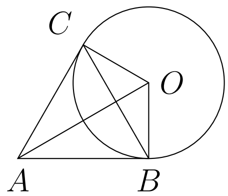
Oppgave 8. Som i titallsystemet tilegner vi vekter til hvert siffer. I titallsystemet er vektene 1, 10, 10^2, 10^3 og så videre, regnet fra høyre. I tretallsystemet er vektene 1, 3, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$ og så videre. Så 1021 i tretallsystemet svarer til $1 \cdot 27 + 0 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 1 = 34$. . . . . **C**

Oppgave 9. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \dfrac{3+2\sqrt{2}}{1}$ . . . . **B**

Oppgave 10. Vi kan lage $3^6 = 729$ koder dersom vi ser bort fra kravet om at alle sifrene skal brukes. Vi kan lage $2^6 = 64$ koder med bare sifrene 1 og 2, og tilsvarende om vi bruker bare 1 og 3 eller bare 2 og 3. Det gir i alt $3 \cdot 64 = 192$ koder som bare bruker to siffer. Men da har vi tellet med de tre kodene som bruker bare ett siffer to ganger hver, altså en gang for mye. Så det er bare $192 - 3 = 189$ koder som ikke bruker alle de tre sifrene. Dermed er det i alt $729 - 189 = 540$ koder som bruker alle sifrene. . . . . **C**

Oppgave 11.

La O være sentrum i den gitte sirkelen. Da er $\angle OCA = \angle OBA = 90°$, fordi AB og AC er tangenter til sirkelen. Linjestykket AO deler $\angle CAB$ i to like deler, hver på 30°. Dermed er $|AO| = 2|OC| = 2$, og ved Pytagoras' setning er $|AC| = \sqrt{|AO|^2 - |OC|^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.



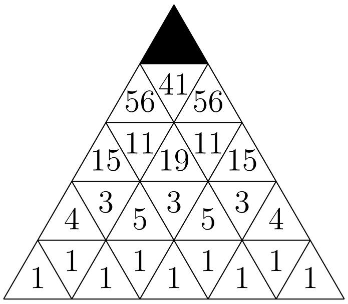
. . . . **E**

Oppgave 12. π^2 er størst: Først er $3{,}13 \cdot 3{,}15 = (3{,}14 - 0{,}01)(3{,}14 + 0{,}01) = 3{,}14^2 - 0{,}01^2 < \pi^2$. Videre er $\pi^2 > 3{,}14^2 > 9{,}85$, og $\sqrt{9{,}61}\pi = 3{,}1 \cdot \pi < \pi^2$. Til slutt er $3{,}15 > \pi$, så $\pi^3/3{,}15 < \pi^3/\pi = \pi^2$. . . . . **D**

Oppgave 13. Produktet $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 10$ inneholder faktoren $2 \cdot 5 \cdot 10 = 100$, så ethvert multiplum av dette må ende i to nuller. . . . . **A**

Oppgave 14. Om sidelengden i kuben er s, så er avstanden mellom motstående hjørner på en sideflate $s\sqrt{2}$, ved Pytagoras' teorem. Om vi skjærer kuben med et plan som inneholder to motstående sidekanter, får vi derfor et rektangel med sidekanter s og $s\sqrt{2}$. En ny anvendelse av Pytagoras viser at avstanden mellom to motstående hjørner i dette rektangelet er lik $\sqrt{s^2 + 2s^2} = \sqrt{3}s$. Dette må være lik diameteren i kulen, altså lik 2. Derfor er $s = 2/\sqrt{3}$. . . . . **B**

Oppgave 15.



Vi fyller inn figuren nedenfra, der tallet i hver rute er totalt antall veier fra denne ruten til nederste rad. Det vil si at vi fyller inn nederste rad med ettall, og ellers skal hver rute ha et tall lik summen av tallene til naboene i raden under. Merk at trekanter med spissen ned har tre naboer i raden under, de med spissen opp har fem, unntatt de på enden av hver rad, som har fire – og den øverste, som har tre. Det totale antallet veier fra øverste rute blir så summen av de tre tallene i raden under, det vil si $56+41+56 = 153$. (Noen vil sikkert finne det mer naturlig å fylle inn figuren ovenfra, da med antall veier fra den svarte ruten til hver enkelt rute. Så må man addere tallene i nederste rad til slutt.) .... **B**

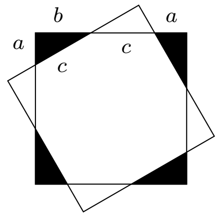
Oppgave 16. Siste siffer i et produkt avhenger bare av siste siffer i faktorene. Derfor kan vi finne siste siffer i en potens a^n for $n = 1, 2, 3$ og så videre ved å starte med siste siffer i a og deretter multiplisere med siste siffer i a gjentatte ganger, og bare beholde siste siffer i hvert trinn. I tabellen nedenfor har vi gjort dette for tallene 0 til 9 og alle potenser fra første til femte potens, og markert tallsifre ut over det siste med $\ldots$:

a^1 :	$\ldots 0$	$\ldots 1$	$\ldots 2$	$\ldots 3$	$\ldots 4$	$\ldots 5$	$\ldots 6$	$\ldots 7$	$\ldots 8$	$\ldots 9$
a^2 :	$\ldots 0$	$\ldots 1$	$\ldots 4$	$\ldots 9$	$\ldots 6$	$\ldots 5$	$\ldots 6$	$\ldots 9$	$\ldots 4$	$\ldots 1$
a^3 :	$\ldots 0$	$\ldots 1$	$\ldots 8$	$\ldots 7$	$\ldots 4$	$\ldots 5$	$\ldots 6$	$\ldots 3$	$\ldots 2$	$\ldots 9$
a^4 :	$\ldots 0$	$\ldots 1$	$\ldots 6$	$\ldots 1$	$\ldots 6$	$\ldots 5$	$\ldots 6$	$\ldots 1$	$\ldots 6$	$\ldots 1$
a^5 :	$\ldots 0$	$\ldots 1$	$\ldots 2$	$\ldots 3$	$\ldots 4$	$\ldots 5$	$\ldots 6$	$\ldots 7$	$\ldots 8$	$\ldots 9$

Siden tallsifrene i femte rad er lik de i første rad, har en femtepotens av ethvert heltall samme siste siffer som tallet selv. Man ser også av tabellen at ingen lavere potens har denne egenskapen. .... **B**

Oppgave 17. Én løsning er $x = 0$. Dersom $x \neq 0$ kan vi dividere med x^2 og få $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$. Setter vi $u = x^2$, gir dette en andregradsligning $2u^2 + 3u - 2 = 0$, med løsninger $u = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$, altså $u = -2$ eller $u = \frac{1}{2}$. Siden $u = x^2$ må $u > 0$, så bare $u = \frac{1}{2}$ er relevant. Den gir de to løsningene $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. I alt tre løsninger. .... **C**

Oppgave 18.



Alle de svarte og hvite trekantene i figuren er kongruente. Om sidene har lengde a, b og c som i figuren, ser vi at sidekanten i kvadratet blir $a + b + c$, så $a + b + c = 2$. Trekantene har vinkler 30°, 60° og 90°, så $b = \sqrt{3}a$ og $c = 2a$. Derfor er $a + \sqrt{3}a + 2a = 2$, så $a = 2/(3 + \sqrt{3}) = (1-1/\sqrt{3})$. Det totale arealet av de fire svarte trekantene er $4 \cdot \frac{1}{2}ab = 2\sqrt{3}a^2 = 8/\sqrt{3} - 4$. .... **A**

Oppgave 19. Siden tre sider som møtes i ett hjørne alle er nabosider, må Trine bruke minst tre farger på hver terning. Ingen farge kan brukes på flere enn to sider, og de to sidene må i tilfelle være motstående.

Om hun bruker bare tre farger på en terning, må motstående sider alltid ha samme farge. Dersom to terninger er malt med de samme tre fargene, er de likt malt: For når vi ser på et hjørne, er det to mulige rekkefølger på fargene til de tre sidene som møtes der, og valget av rekkefølge bestemmer fargeleggingen. Går vi til et nabohjørne, står de samme tre fargene i motsatt rekkefølge, så vi kan finne et hjørne i hver terning som har fargene i samme rekkefølge. Da er også terningene likt malt. Men det er fire måter å velge ut hvilken farge vi *ikke* skal bruke, så bare fire terninger kan males forskjellig fra hverandre med tre farger hver.

Skal Trine bruke alle fire fargene på en terning, må hun bruke to farger to ganger og to farger én gang hver. La oss si at farge I og II brukes to ganger hver, mens farge III og IV brukes én gang hver. Så farge I brukes på to motstående sider, og farge II også på to motstående sider, med farge III og IV på hver sin av de siste motstående sidene. To terninger som er malt slik er malt likt, for vi kan legge dem med siden som er malt IV opp og III ned, og så rotere terningene om vertikalaksen til sidene med I og II vender samme vei. Eneste valgmulighet i dette tilfellet er hvilke to farger som skal være I og II, uten hensyn til rekkefølgen. Dette kan gjøres på $4 \cdot 3/2 = 6$ måter.

Trine kan altså male i alt $4 + 6 = 10$ terninger forskjellig fra hverandre. .. **A**

Oppgave 20. Kvadrattallene mellom 2013 og 3602 er $45^2 = 2025$, 46^2, $\ldots$, $60^2 = 3600$, men vi skal bare telle de av dem som gir rest 4 etter divisjon med 7. Et tall på formen $7m+n$ med $n = 0, 1, \ldots, 6$ har kvadrat $(7m+n)^2 = 7 \cdot (7m^2 + 2mn) + n^2$, så resten etter divisjon med 7 avhenger bare av n. Ved å sjekke mulighetene ser vi at resten etter divisjon med 7 er 4 kun når $n = 2$ eller $n = 5$. Blant tallene 45, 46, $\ldots$, 60 er det fire som gir 2 eller 5 etter divisjon med 7, nemlig 47, 51, 54 og 58. .... **E**

Fasit

1		D	11		E
2		B	12		D
3		D	13		A
4		A	14		B
5		E	15		B
6		C	16		B
7		D	17		C
8		C	18		A
9		B	19		A
10		C	20		E

Hvis denne siden kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.