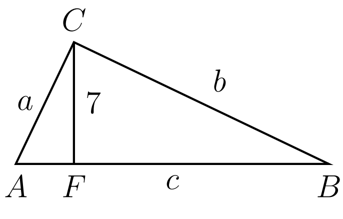
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2013–2014. *Løsninger*

Andre runde 16. januar 2014

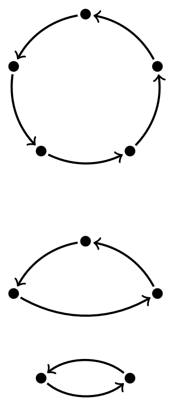
Oppgave 1. En mulighet er at begge de to trekkene går to rader frem eller tilbake, og en kolonne til siden. Det gir -4, 0 eller 4 rader frem, og -2, 0 eller 2 kolonner mot høyre – i alt $3 \cdot 3 = 9$ mulige felt. En annen mulighet er tilsvarende, men med rader og kolonner byttet om. Det gir 9 nye mulige felt, med ett felt felles med den første muligheten, nemlig feltet som brikken startet på. Vi har nå 17 mulige felt. Den gjenværende muligheten er at det ene trekket går to rader frem eller tilbake, mens det andre går to kolonner til siden. Dette gir -3, -1, 1 eller 3 rader frem, og tilsvarende for kolonnene. I alt altså $4 \cdot 4 = 16$ mulige felt, som ingen av dem overlapper med de 17 vi hadde fra før. I alt gir det $17 + 16 = 33$ mulige felt. **33**

Oppgave 2. Primtallsfaktoriseringen av 500 er $2^2 \cdot 5^3$. Tallet a må gå opp i 500, så vi kan skrive $a = 2^{a_2} \cdot 5^{a_5}$ med $0 \le a_2 \le 2$ og $0 \le a_5 \le 3$. Vi skriver $b = 2^{b_2} \cdot 5^{b_5}$ og $c = 2^{c_2} \cdot 5^{c_5}$ tilsvarende, slik at $a_2 + b_2 + c_2 = 2$ og $a_5 + b_5 + c_5 = 3$. $a_2 = 0$ gir tre mulige valg for b_2, $a_2 = 1$ gir to mulige valg for b_2, og $a_2 = 2$ gir ett mulig valg for b_2. Til sammen kan (a_2, b_2) velges på $3 + 2 + 1 = 6$ måter, og c_2 er da bestemt. På tilsvarende vis kan (a_5, b_5) velges på $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ måter, og c_5 er da bestemt. Dermed har vi i alt $6 \cdot 10 = 60$ mulige valg for (a, b, c). **60**

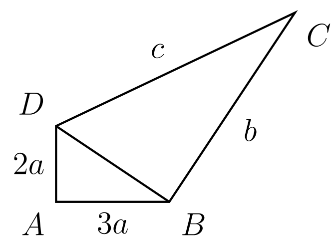
Oppgave 3. Med betegnelser som i figuren har vi $a^2 + b^2 = c^2$ og $a + b + c = 42$. Fra den siste av disse får vi $(a + b)^2 = (42 - c)^2$. Ganger vi ut kvadratene og trekker fra den første ligningen, får vi $2ab = 42^2 - 84c$. Trekantene ABC og ACF er formlike, slik at $b/c = 7/a$, altså $ab = 7c$. Setter vi det inn i ligningen foran får vi $14c = 42^2 - 84c$, med løsningen $c = 18$. **18**



Oppgave 4. Tallene 1–9 tar opp de første ni sifrene, mens tallene 10–99 tar de neste $2 \cdot 90 = 180$ sifrene, til sammen 189 sifre så langt. Fordi $2013 - 189 = 3 \cdot 608$, har vi brukt opp 2013 siffer etter å ha lagt til 608 tresifrede tall. Disse er altså tallene 100–707, så rekken av tallsiffer fortsetter fra det 2014. sifferet med 708709710 . . . . **708**



Oppgave 5. I stedet for å legge klinkekulene i esker, kan vi legge dem på et papirark og tegne piler mellom klinkekulene. Hvis en blå klinkekule skal i en gul eske, tegner vi en pil fra den blå til den gule klinkekulen. På den måten får vi et diagram av piler mellom klinkekulene, der hver klinkekule befinner seg i halen av én pil og ved spissen av en annen. Pilene må danne lukkede sykler av lengde 2, 3 eller 5 – se figuren. (Vi kan ikke ha en sykel av lengde 4, for da kan ikke den femte klinkekulen være med i noen sykel.) Det er $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ mulige måter å ordne klinkekulene i en sykel med fem kuler: Fire mulige valg for klinkekulen etter den blå, deretter tre for den neste, to for den etter det igjen, og for den fjerde og femte er det bare ett valg. Men vi kan også ordne de fem klinkekulene i en sykel på tre og en på to kuler. Det er $5 \cdot 4/2 = 10$ måter å velge ut hvilke to kuler skal tilhøre den minste sykelen, og for hvert valg finnes det to måter å ordne de tre andre i en sykel. I alt har vi $24 + 10 \cdot 2 = 44$ måter å gjøre det på. **44**



Oppgave 6. De to rettvinklede trekantene ABD og BCD har siden BD felles. Pytagoras anvendt på de to trekantene gir derfor $(2a)^2 + (3a)^2 = c^2 - b^2$, med andre ord $13a^2 = (c-b)(c+b)$. Fordi 13 er et primtall, må 13 gå opp i enten $c - b$ eller $c + b$. For et minimalt resultat prøver vi oss frem med $c + b = 13$, slik at vi må ha $a^2 = c - b$. Da blir a minst mulig om vi velger $a = 1$, og dermed $b = 6$ og $c = 7$, med $a + b + c = 14$. Det er klart at vi ikke kan få en mindre sum ved å la $b + c$ være et større multiplum av 13. Likedan, om 13 går opp i $c - b$ må $c \geq 14$, og summen blir større. **14**

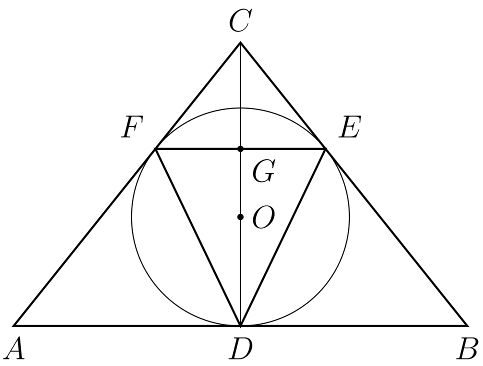
Oppgave 7. $p(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + \cdots$, så $r_1 + r_2 + r_3 = -5$. $p(-5) = -5^3 + 5^3 + 20 \cdot 5 + 14 = 114$.

Alternativ løsning: Vi ser at $p(1) = 0$. Polynomdivisjon gir $p(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 6x - 14)$. Nullpunktene er 1 og $-3 \pm \sqrt{23}$, med sum -5. .... **114**

Oppgave 8. Et tresifret palindrom har formen $100a + 10b + a = 101a + 10b$, der a og b er tallsifre med $a \neq 0$. Tverrsummen er $2a + b$. Dersom $a = b$ er tallet $111a$ og tverrsummen $3a$, som går opp i tallet fordi $3 \mid 111$ (vi bruker en loddrett strek i betydningen «går opp i»). Det gir ni muligheter med $a = b$. I tilfellet $a \neq b$ må $2a + b \mid (101a + 10b) - 10(2a + b) = 81a$. Vi kan ikke ha

$b = 0$, for $2a \nmid 81a$. La c være største felles divisor for a og b, og la $a' = a/c$, $b' = b/c$. Da må også $2a' + b' \mid 81a'$. Men nå har $2a' + b'$ ingen felles divisorer med a', så $2a' + b' \mid 81$. Siden $a' \neq b'$ er $2a' + b' > 3$. Vi må også ha $2a' + b' < 27$, så vi konkluderer at $2a' + b' = 9$. Det gir mulighetene $(a', b') = (1, 7)$, $(2, 5)$ eller $(4, 1)$. Bare i det siste tilfellet kan $c > 1$. Så mulighetene for (a, b) er $(1, 7)$, $(2, 5)$, $(4, 1)$ og $(8, 2)$ i tillegg til de ni med $a = b$. Til sammen har vi de 13 palindromene 111, 222, …, 999, 171, 252, 414 og 828. .... **13**

Oppgave 9. Vi har $AF = AD = \frac{10}{2} = 5$, fordi AD og AF tangerer samme sirkel i henholdsvis D og F (du kan enklest se det ved å sjekke at trekantene ADO og AFO er kongruente). Så $FC = 8 - 5 = 3$. De to trekantene FEC og ABC er formlike med lengdeforhold $3:8$, og spesielt er $FE = \frac{3}{8}AB$. Vi har også forholdet $3:8$ mellom høydene til FEC og ABC, altså $CG = \frac{3}{8}CD$, og derfor $DG = \frac{5}{8}CD$.



Vi finner nå $\text{areal}(DEF) = \frac{1}{2}FE \cdot DG = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}AB \cdot \frac{5}{8}CD = \frac{15}{64}\text{areal}(ABC)$, og $\frac{64}{15} \cdot 120 = 512$. **512**

Oppgave 10. Vi søker positive heltall a og b med $2014a = 5991b + 289$. Men $5991 = 3 \cdot 2014 - 51$, så vi kan i stedet skrive dette som $51b = 2014(3b - a) + 289$. Fordi primtallet 17 går opp i både 289 og 51 men ikke i 2014, må 17 gå opp i $3b - a$. Det er også klart at $3b - a \geq 0$ om $b > 0$, og minste mulige verdi for $3b - a$ gir også minste mulige verdi for b. 51 går ikke opp i 289, så $3b - a \neq 0$. Vi forsøker med $3b - a = 17$. Det gir $51b = 2014 \cdot 17 + 289$, som er ekvivalent med $3b = 2014 + 17 = 2031$. Siden 3 går opp i 2031 er dette et mulig valg, og det gir $b = 2031/3 = 677$. **677**

Fasit

1		**33**	6		**14**
2		**60**	7		**114**
3		**18**	8		**13**
4		**708**	9		**512**
5		**44**	10		**677**

Hvis denne sida kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.