Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2014–2015. *Løsninger*

Finale 17. mars 2015

Oppgave 1.

a. Om vi adderer de tre ligningene, trekker fra høyresiden og flytter om på leddene, får vi

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 - 4yz + 4z^2 + z^2 - 4zx + 4x^2 = 0,$$

med andre ord

$$(x - 2y)^2 + (y - 2z)^2 + (z - 2x)^2 = 0.$$

Dermed er $x = 2y$, $y = 2z$ og $z = 2x$, som gir $x = 8x$, slik at $x = 0$, og dermed også $y = z = 0$. Så bare den opplagte løsningen $(0, 0, 0)$ oppfyller ligningen.

b. Vi får $f(0) = 0$ ved å la $y = 0$ og $x \neq 0$ i funksjonalligningen.

Dersom det finnes en a slik at $f(a) \neq 0$, kan vi sette inn $x = a$ og $y = u/f(a)$ i ligningen og få $a^2 f(u) = u^2 f\big(f(a)\big)/f(a)$. Siden $f(0) = 0$, er $a \neq 0$. Dermed er $f(u) = bu^2$ for alle u, der $b = f\big(f(a)\big)/\big(a^2 f(a)\big)$.

Setter vi inn $f(x) = bx^2$ i funksjonalligningen får vi $b^3x^6y^2 = b^4x^6y^2$, som holder for alle x og y hvis og bare hvis $b = 0$ eller $b = 1$.

Derfor er $f(x) = 0$ og $f(x) = x^2$ er de eneste løsningene.

Oppgave 2.

a. På grunn av symmetrien i problemet kan vi anta $a \geq b \geq c$.

Hvis vi først plasserer de røde ridderne rundt bordet, er det a mellomrom som hvert må fylles med minst en brun eller oransje ridder. Det er umulig dersom $a > b + c$.

På den annen side, om $a \leq b + c$, kan Arthur plassere ridderne slik: Plassér først de røde i sirkel rundt bordet, og sett inn alle de brune i hvert sitt mellomrom mellom to røde (dette er mulig fordi $a \geq b$). Fyll hvert av de gjenværende $a - b$ mellomrommene mellom to røde med en oransje ridder (dette er mulig fordi $a \leq b + c$). Hvis det nå er noen oransje igjen, kan de plasseres ved siden av hver sin brun ridder (dette er mulig fordi $b \geq c$).

Arthur kan altså få til bordplasseringen han ønsker hvis, og bare hvis, $a \leq b+c$. Dersom dette gjelder, er også $a+\frac{1}{2} < (b+\frac{1}{2})+(c+\frac{1}{2})$, så det finnes en trekant med sidekanter $a+\frac{1}{2}$, $b+\frac{1}{2}$ og $c+\frac{1}{2}$. På den annen side, om $a > b+c$ så er $a \geq b+c+1$, fordi a, b og c er heltall. Men da er også $a+\frac{1}{2} > (b+\frac{1}{2})+(c+\frac{1}{2})$, så ingen slik trekant finnes.

b. For det første, så snart den svarte kulen er trukket og det bare er røde kuler igjen i posen, kan Nils doble formuen i hvert trekk ved å velge $x=y$, og et bedre resultat er åpenbart umulig.

Skriv $f(n)$ for den største formuen Nils kan sikre seg når det er n røde og én svart kule i posen, og formuen er 1.

Dersom han trekker den svarte kulen, er den nye formuen $1-x$. Nå er det igjen n røde kuler, så Nils kan doble formuen 2^{n-1} ganger, og er sikret en sluttformue lik $(1-x)2^{n-1}$.

Hvis han derimot trekker en rød kule, er den nye formuen $1+x$, og han kan sikre seg sluttformuen $(1+x)f(n-1)$.

Gitt valget x er han derfor sikret en sluttformue lik

$$\min\Big((1-x)2^{n-1}, (1+x)f(n-1)\Big),$$

og han må velge $x \in [0,1]$ slik at dette blir størst mulig.

Dersom det finnes en $x \in [0,1]$ med $(1-x)2^{n-1} = (1+x)f(n-1)$, er det denne verdien som er best. Det gir

$$x = \frac{2^{n-1}-f(n-1)}{2^{n-1}+f(n-1)}, \tag{1}$$

og dermed

$$f(n) = (1-x)2^{n-1} = \frac{2^n f(n-1)}{2^{n-1}+f(n-1)},$$

som kan skrives på formen

$$\frac{2^n}{f(n)} = 1 + \frac{2^{n-1}}{f(n-1)}.$$

Men $f(0)=1$, så vi får $2^n/f(n) = n+1$ ved induksjon, og derfor

$$f(n) = \frac{2^n}{n+1}.$$

Vi gjorde en antagelse i utledningen som må sjekkes, nemlig at valget (1) resulterer i $x \in [0,1]$. Men vi finner

$$\frac{2^{n-1} - f(n-1)}{2^{n-1} + f(n-1)} = \frac{1 - 1/n}{1 + 1/n} \in [0,1],$$

så den antagelsen holder.

Oppgave 3. Skriv a for sidelengden i femkanten, og A for arealet. Trekanten med sidekant nummer i som grunnlinje og toppunkt P har areal $\frac{1}{2}ad_i$, og summen av disse arealene er arealet til hele femkanten. Dette leder til ligningen

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = \frac{2A}{a}.$$

AM–GM-ulikheten gir dermed

$$d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 \le \left(\frac{2A}{5a}\right)^5,$$

med likhet hvis og bare hvis alle lengdene d_i er like.

Det er klart at likhet holder for sentrum i femkanten. Videre, om alle d_i er like, så må P ligge på halveringslinjen for hver av de fem vinklene i femkanten. To av disse halveringslinjene har ikke mer enn ett punkt felles, så likhet holder bare når P er i sentrum.

Sentret i femkanten er dermed det eneste punktet der produktet har maksimal verdi.

Oppgave 4.

Vi har $3^x + 7^y \equiv (-1)^x + (-1)^y \mod 4$, og siden de eneste kvadratiske rester modulo 4 er 0 og 1, må x og y ha motsatt paritet.

a. Skriv $y = 2k$, så skal vi ha $3^x + 7^{2k} = n^2$, det vil si

$$3^x = n^2 - 7^{2k} = (n - 7^k)(n + 7^k)$$

for et heltall $n \ge 0$.

Siden 3 er er primtall, er begge faktorene på høyre side potenser av 3. Men $(n + 7^k) - (n - 7^k) = 2 \cdot 7^k$ er ikke delelig med 3, så det følger at $n - 7^k = 1$, og dermed

$$3^x = 2 \cdot 7^k + 1.$$

En åpenbar løsning er $k = 0$, som gir $x = 1$ og $y = 0$. Vi skal se at det ikke finnes andre løsninger.

Anta derfor $k \geq 1$. Da er $3^x \equiv 1 \mod 7$, og det impliserer i sin tur $x \equiv 0 \mod 6$. Men dette er umulig, for vi fant innledningsvis at x er et oddetall når y er et partall.

b. Vi observerte innledningsvis at x må være et partall når y er odde. La oss si $x = 2k$. På samme måte som i **a** får vi

$$7^y = 2 \cdot 3^k + 1,$$

med den opplagte løsningen $k = 1$, som gir $x = 2$ og $y = 1$. Vi skal se at det ikke finnes flere løsninger.

Så vi antar $k \geq 2$, skriver om ligningen over til

$$2 \cdot 3^k = 7^y - 1 = (7 - 1) \cdot (7^{y-1} + 7^{y-2} + \cdots + 7 + 1),$$

og forkorter videre til

$$3^{k-1} = 7^{y-1} + 7^{y-2} + \cdots + 7 + 1.$$

Siden $k \geq 2$ gir dette $y \equiv 0 \mod 3$. Med $y = 3q$ får vi faktoriseringen

$$3^{k-1} = (7^{3q-3} + 7^{3q-6} + \cdots + 1) \cdot (7^2 + 7 + 1).$$

Men $7^2 + 7 + 1 = 57 = 3 \cdot 19$, så høyresiden er ikke en potens av 3, og vi har en motsigelse.