# Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2014–2015. *Løsninger*

Første runde 6. november 2014

**Oppgave 1.** $\frac{0{,}08}{0{,}64} = \frac{1}{8} \neq 0{,}8$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **E**

**Oppgave 2.** Arealet av det røde området er $2 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 12 = 6^3$, mens arealet av det blå området er $2 \cdot 22 + 2 \cdot 16 - 2 \cdot 2 = 2 \cdot 6^2$, så forholdet mellom de to arealene er 3. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **A**

**Oppgave 3.** Johanne har $18/15 \cdot 40 = 48$ blå blyanter. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **D**

**Oppgave 4.** Avstanden fra $A$ til $E$ kan regnes ut ved å addere de gitte avstandene med fortegn pluss eller minus på hver. Siden én avstand er et oddetall og de andre er partall, må summen uansett være et oddetall. Summen $3 - 6 + 8 - 4 = 1$ viser at 1 er en mulig avstand, og den må være den minste mulige. . . . . . . . . . . . . . . . . . **B**

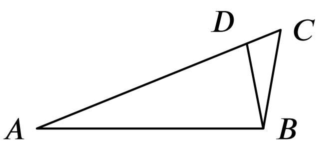
**Oppgave 5.** Kari må ikke bruke mer enn $1/8$ time på de ti kilometrene. Hun brukte $1/10$ time på de første ni kilometrene, så på den siste kilometeren kan hun ikke bruke mer enn $1/8 - 1/10 = 1/40$ time, som svarer til en gjennomsnittsfart på 40 km/h. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **D**

**Oppgave 6.** $625 = 3^0 \cdot 5^4$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **E**

**Oppgave 7.**

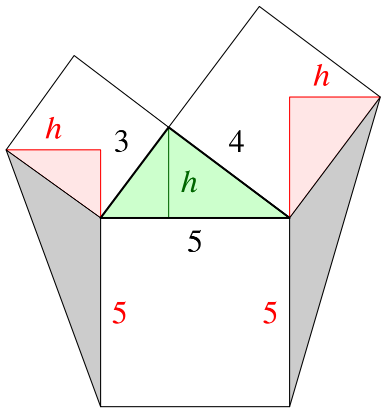
Trekanten $BAD$ er likebent, så $\angle ABD = \angle BDA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAD) = \frac{1}{2}(180^\circ - 22^\circ) = 79^\circ$. Dermed er $\angle DBC = \angle ABC - \angle ABD = 100^\circ - 79^\circ = 21^\circ$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **A**




**Oppgave 8.** Hvis en ny gutt starter vil det være 14 gutter og 7 jenter, så i utgangspunktet er det 13 gutter og 7 jenter i klassen. Produktet av de to antallene er 91. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **C**

**Oppgave 9.**




De to rettvinklede røde trekantene i figuren har hypotenus på en side av hvert sitt lille kvadrat, og kateter parallelle med sidene i det store kvadratet. Om de roteres 90° i hver sin retning om nederste hjørne, vil de til sammen fylle ut den grønne trekanten. Spesielt er de tre sidene merket $h$ like lange, og $h = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$. Men $h$ er også høyden til hver av de grå trekantene med grunnlinje 5, så det totale arealet av disse to trekantene er $h \cdot 5 = 12$.
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **A**

**Oppgave 10.** Det må finnes minst $N = 20$ brikker av hver farge for at det ikke skal være mulig å trekke til sammen 81 brikker av de andre fargene. Det høyeste mulige antallet brikker av én farge kan oppnås om det ikke er fler enn 20 brikker av hver av de tre andre fargene, det vil si 60 brikker til sammen. Så det er mulig å ha $M = 40$ brikker av én farge. $M - N = 20$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **C**

**Oppgave 11.** Faktorisering av de gitte tallene gir $A = 7 \cdot 13$, $B = 17 \cdot 23$, $C = 27 \cdot 33 = 3^4 \cdot 11$, $D = 7 \cdot 11 \cdot 13$ og $E = 9 \cdot 11 \cdot 19$. Den største primfaktoren (23) er det $B$ som har. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **B**

**Oppgave 12.** Skriv $p$ for sannsynligheten for at Anne vinner. Hvis hun ikke vinner i første myntkast, så er rollene byttet om. Det betyr at Bente i så fall vinner med sannsynlighet $p$, så Anne vinner med sannsynlighet $1 - p$.

Anne kan altså vinne på én av to måter: Hun vinner i første myntkast, med sannsynlighet $\frac{1}{2}$, eller hun vinner senere, med sannsynlighet $\frac{1}{2}(1 - p)$. Derfor er $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - p) = 1 - \frac{1}{2}p$, slik at $p = \frac{2}{3}$.

En variant av dette argumentet gir $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p$, fordi sannsynligheten for at ingen har vunnet etter to myntkast er $\frac{1}{4}$, og i så fall starter spillet på ny, slik at Anne igjen har sannsynlighet $p$ for å vinne.

*Alternativt*: Anne vinner på kombinasjonene K, MMK, MMMMK og så videre. Disse har til sammen sannsynlighet $\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{2})^5 + \cdots = \frac{2}{3}$. . . . . . . . . . . . . . . . . **B**

**Oppgave 13.** $a^b = 2$ gir $a^{-3b} = (a^b)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$, så $3a^b + 8a^{-3b} = 6 + 1 = 7$. . **B**

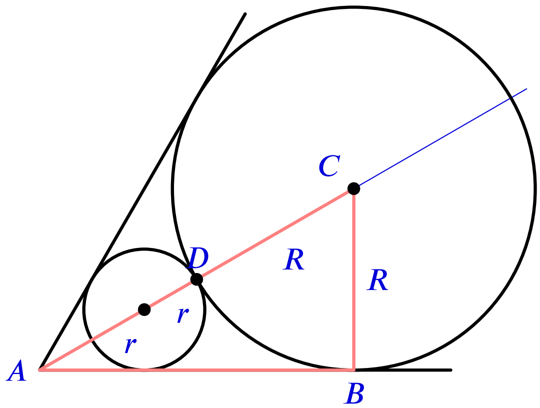
**Oppgave 14.** Merk at $2002/22 = 91 = 7 \cdot 13$. Skriv $a = 22x$ og $b = 22y$, så følger det at $xy = 7 \cdot 13$. Siden $a$ har færre divisorer enn $b$ må $y$ ha begge primtallsfaktorene 7 og 13, så $x = 1$ og $y = 91$, og derfor er $a + b = 22 \cdot (x + y) = 2024$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **B**

**Oppgave 15.** Siden 20 er et partall og 5 er odde, må Lars bruke ingen, to eller fire brikker av høyde 5. Det første og siste alternativet gir bare ett mulig tårn hver. For det midterste alternativet bruker han sju brikker: To av høyde 5, og fem av høyde 2. Det er to valg blant de sju for brikkene av høyde 5. Dette resulterer i $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 = 21$ muligheter. Til sammen kan han bygge tårnet på 23 forskjellige måter. . . . . . . . . **A**

**Oppgave 16.** Om de to sidelengdene er $a$ og $b$, er $a + b = 4$ og $a^3 + b^3 = 25$. Identiteten $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ gir $a^2 - ab + b^2 = \frac{25}{4}$. Samtidig er $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = 16$, og en kombinasjon av disse to gir $3(a^2 + b^2) = 2 \cdot \frac{25}{4} + 16$. Summen av de to overflatene er da $6(a^2 + b^2) = 25 + 32 = 57$. . . . . **C**

**Oppgave 17.**

De to sirklene må ligge som vist i figuren. Trekanten $ABC$ har vinkler 30°, 90° og 60°, så $AC = 2R$, og derfor $AD = R$. Det samme argumentet med den lille sirkelen leder til $AD = 3r$, så $R = 3r$. I oppgaven er enten $R = 5$ eller $r = 5$, så den andre sirkelen har radius enten $3 \cdot 5 = 15$ eller $5/3$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **D**




**Oppgave 18.** Alle tillatte veier fra nedre venstre hjørne til diagonalen har lengde lik 5 sidekanter i de små kvadratene. For hver av de fem sidekantene kan du fritt velge å gå til høyre eller opp, så det er i alt $2^5 = 32$ mulige veier. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **D**

**Oppgave 19.** Hvis Emmy startet med tallet $a$ og hun fikk $b$ som første svar, er $b \le \sqrt{a} < b+1$, som er ekvivalent med $b^2 \le a < b^2 + 2b + 1$. Ettersom $a$ er et heltall er dette i sin tur ekvivalent med $b^2 \le a \le b^2 + 2b$. Hvis Emmy får svaret $c$ etter neste utregning, er på samme måte $c^2 \le b \le c^2 + 2c$. Det tredje svaret er 1, så $1^2 \le c \le 1^2 + 2 \cdot 1$, altså $1 \le c \le 3$. Men det er gitt at $c \ne 1$, så $c$ er enten 2 eller 3. Det gir $2^2 \le b \le 3^2 + 2 \cdot 3$, det vil si $4 \le b \le 15$, som til slutt gir $4^2 \le a \le 15^2 + 2 \cdot 15$, altså $16 \le a \le 255$. Begge ytterpunktene er mulige her, og differansen mellom dem er $255 - 16 = 239$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **C**

**Oppgave 20.** Siden Peter starter med 30 kuler i eskene totalt, og det totale antallet minker med 3 i hvert trekk, må antall kuler i eskene alltid være delelig med 3. Etter hvert trekk legger Peter minst $4 - 3 = 1$ kule tilbake i en eske, så det er ikke mulig å tømme alle eskene.

Men Peter kan avslutte spillet med tre kuler slik: Først tar han ti kuler fra eske 10 og legger sju av dem i eske 7. Nå er eske 10 tom, og han rører den ikke mer. Dersom eske 4 har $m$ kuler og eske 7 har $n$ kuler, skriver vi det som $(m, n)$. Peter kan fullføre spillet slik: $(10, 17)$ – $(14, 10)$ – $(18, 3)$ – $(14, 4)$ – $(10, 5)$ – $(6, 6)$ – $(2, 7)$ – $(6, 0)$ – $(2, 1)$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **C**

## Fasit

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | E | 11 | | B |
| 2 | | A | 12 | | B |
| 3 | | D | 13 | | B |
| 4 | | B | 14 | | B |
| 5 | | D | 15 | | A |
| 6 | | E | 16 | | C |
| 7 | | A | 17 | | D |
| 8 | | C | 18 | | D |
| 9 | | A | 19 | | C |
| 10 | | C | 20 | | C |

Hvis denne siden kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.