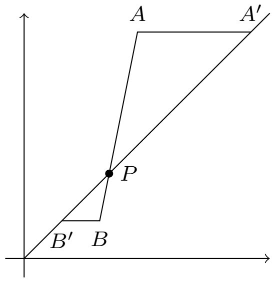
# Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2014–2015. *Løsninger*

Andre runde 15. januar 2015

**Oppgave 1.** Vi får seks-sifrede tall av ønsket type ved å stryke tre sifre fra 123456789. Dette kan gjøres på $\binom{9}{3} = 9 \cdot 8 \cdot 7/3! = 84$ måter. ............ **84**

**Oppgave 2.** Med $c = 1/b$ er $143 = a^2 - c^2 = (a-c)(a+c) = 13(a+c)$, så $a + c = 143/13 = 11$. ............................................. **11**

**Oppgave 3.** La $A' = (1440, 1440)$ og $B' = (2, 2)$. Da er linjestykkene $BB'$ og $AA'$ parallelle, så de to trekantene $PAA'$ og $PBB'$ er likeformet, og dermed er $PA/PB = AA'/BB' = (1440 - 720)/(4 - 2) = 360$.
Av praktiske grunner er ikke punktene i figuren plassert i henhold til oppgaven, men prinsippet er det samme. .. **360**



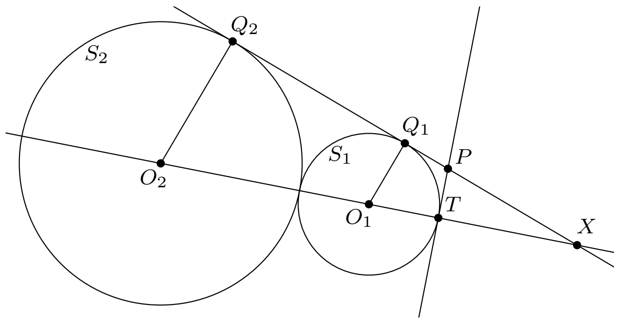

**Oppgave 4.** Siste siffer i $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ avhenger bare av siste siffer i $a_{n-1}$ og $a_{n-2}$. Siste siffer i $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... blir 0, 1, 3, 7, 5, 1, 3, ..., og de siste fire tallene i denne følgen gjentas i det uendelige. Siden $2014 = 2012 + 2$ og 2012 er delelig med 4, er siste siffer i $a_{2014}$ lik siste siffer i $a_2$, altså 3. ..... **3**

**Oppgave 5.** De hvite tårnene må begrense seg til tre rader. For hvis fire rader inneholder hvite tårn, er det bare to rader til disposisjon for de svarte tårnene, og en av de to radene må ha minst fem svarte tårn, som tvinger alle de hvite tårnene inn på én linje, og det er det ikke plass til. På samme måte må alle de hvite tårnene finnes innenfor tre linjer. Tre rader og tre linjer gir eksakt ni plasser, som da alle må ha et hvitt tårn, og så må de svarte tårnene plasseres de gjenværende radene og linjene. Plasseringen av brikkene er altså fullstendig bestemt av de radene og linjene som skal inneholde hvite tårn. De tre radene som har hvite tårn kan velges på $\binom{6}{3} = 6 \cdot 5 \cdot 4/3! = 20$ måter, og de tre linjene som har hvite tårn kan likeledes velges på 20 måter. I alt gir det $20 \cdot 20 = 400$ måter å plassere tårnene på. ......................... **400**

**Oppgave 6.** Dersom $A_i = \{a_i, \ldots, b_i\}$, så er $A_{i+1} = \{2a_i, \ldots, 2b_i\}$, slik at $a_{i+1} = 2a_i$ og $b_{i+1} = 2b_i$. Vi kan nemlig liste opp tallene i $A_{i+1}$ slik: $a_i + a_i$, $(a_i + 1) + a_i$, ..., $b_i + a_i$, $b_i + (a_i + 1)$, ..., $b_i + b_i$. Nå er det klart at $a_i = 2^i$ og $b_i = 4 \cdot 2^i$, så $A_8$ inneholder $b_8 - a_8 + 1 = 4 \cdot 2^8 - 2^8 + 1 = 3 \cdot 256 + 1 = 769$ forskjellige tall. ........ **769**

**Oppgave 7.** Vi multipliserer med 10 og kompletterer kvadratet: $4260k - 900k^2 = -(30k)^2 + 2\cdot 71\cdot 30k = 71^2 - (30k-71)^2$. Det er klart at $k = 2$ er heltallet som resulterer i største verdi for dette uttrykket. Det gir $4260k - 900k^2 = 71^2 - 11^2 = 4920$, og $426k - 90k^2 = 492$. ........ **492**

**Oppgave 8.** I figuren er trekantene $XQ_2O_2$, $XQ_1O_1$ og $XTP$ likeformet, med størrelseforhold $2:1$ mellom de to første. Spesielt er $XO_1$ halvparten så lang som $XO_2$, og dermed like lang som $O_1O_2$, altså 90 enheter lang. Pythagoras gir $(XQ_1)^2 = 90^2 - 30^2 = 8 \cdot 30^2$, og derfor $(O_1Q_1/XQ_1)^2 = 1/8$. Da blir også $(PT/XT)^2 = 1/8$, så $(PT)^2 = (XT)^2/8 = 60^2/8 = 450$. ........ **450**




**Oppgave 9.** La $N$ være antall sjokoladebiter i esken. Nils får først 15 hauger med $a$ biter i hver, og finner $N = 15a + 12$. Han spiser de tolv, og oppdager at $15a = 16b + 13$. Han spiser de tretten, og oppdager at $16b = 18c + 14$. Han spiser de fjorten og nitten til, så $18c > 19$, og derfor $c \geq 2$. (I tilfelle det er uklart, må $a$, $b$ og $c$ være heltall.) Den siste ligningen gir $8b = 9c + 7$, så 8 går opp i $9c + 7$, og derfor også i $9c + 7 - 8(c + 1) = c - 1$. Derfor er $c = 8x + 1$, der $x \geq 1$ er et heltall. Vi nøster historien tilbake ett trinn til, og finner $15a = 16b + 13 = 18c + 27 = 18 \cdot 8x + 45$, det vil si $5a = 48x + 15$. Det følger at $x = 5u$ for et heltall $u$, så $N = 15a + 12 = 18 \cdot 8x + 57 = 18 \cdot 40u + 57 = 720u + 57$. Siden $u \geq 1$ og $N < 1000$ er $u = 1$, så $N = 720 + 57 = 777$. .. **777**

**Oppgave 10.** Om $a^2+b^2=c^2+d^2$ kan vi bytte om på tallene slik at ligningen fortsatt holder, og slik at at $a$ er det største av de fire tallene. Da må $b$ være det minste av dem. Etter å ha byttet om $c$ og $d$ om nødvendig, er da $a>c>d>b$. Vi skriver om ligningen først til formen $a^2-c^2=d^2-b^2$, og videre til $(a+c)(a-c)=(d+b)(d-b)$.

Her har begge faktorene på venstre side samme paritet (de er begge odde eller begge partall), og det samme gjelder på høyre side. Det følger at alle fire faktorer har samme paritet. Fra ulikhetene ovenfor er $a+c>d+b$, og dermed $d-b>a-c$. Fordi $a-c\geq 1$ og $d-b$ har samme paritet som $a-c$, må da $d-b\geq 3$.

Med $b=1$ og $d-b=3$ blir $(d+b)(d-b)=15$, som leder til $a+c=15$ og $a-c=1$, altså $b=1$, $d=4$, $c=7$ og $a=8$, med $bdca=224$.

Dette er minste mulige verdi for produktet: Hvis $b\geq 2$, blir $bdca\geq 2\cdot5\cdot6\cdot7>224$. Anta derfor at $b=1$. Da må $d\geq 4$. Vi har allerede undersøkt tilfellet $d=4$ i avsnittet over. Hvis $d=5$ blir $a-c=2$ (fordi $a-c<d-b=4$ med samme paritet), så $bdca\geq 1\cdot5\cdot6\cdot8>224$. Og hvis $d\geq 6$ blir $bdca\geq 1\cdot6\cdot7\cdot8>224$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **224**

## Fasit

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | **84** | 6 | | **769** |
| 2 | | **11** | 7 | | **492** |
| 3 | | **360** | 8 | | **450** |
| 4 | | **3** | 9 | | **777** |
| 5 | | **400** | 10 | | **224** |

Hvis denne sida kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.