Nynorsk

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2015–2016

Finale 1. mars 2016

I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (seks punkt) som skal løysast på fire timar. Svara skal grunngivast og førast på eigne ark. **Begynn på nytt ark for kvar av dei fire oppgåvene.**

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Maksimal poengsum er såleis 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir, skrivereiskapar og tospråklege ordbøker er tillatne.

Oppgåve 1

Ei *vandrande følgje* er ei følgje av heiltal a_i med $a_{i+1} = a_i \pm 1$ for kvar i. Vis at det finnast ei følgje $b_1, b_2, \ldots, b_{2016}$ slik at alle vandrande følgjer $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$ med $1 \leq a_i \leq 1010$ har $a_j = b_j$ for ein eller annan j.

Oppgåve 2

a. Finn alle positive heiltal a, b, c, d med $a \leq b$ og $c \leq d$ slik at

$$\begin{aligned} a + b &= cd, \\ c + d &= ab. \end{aligned}$$

b. Finn alle ikkje-negative heiltal x, y og z slik at

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9!.$$

(Her er $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, som vanleg.)

Oppgåve 3

a. Tre sirklar S_A, S_B og S_C i planet med respektive sentrum i A, B og C tangerer kvarandre parvis utvendig. Tangeringspunktet mellom S_A og S_B kallar vi C', det mellom S_A og S_C kallar vi B', og tangeringspunktet mellom S_B og S_C kallar vi A'. Den felles tangenten mellom S_A og S_C (som går gjennom B') kallar vi ℓ_B, og den felles tangenten mellom S_B og S_C (som går gjennom A') kallar vi ℓ_A. Skjeringspunktet mellom ℓ_A og ℓ_B kallar vi X. Punktet Y ligg slik at $\angle XBY$ og $\angle YAX$ begge er rette. Vis at punkta X, Y og C' ligg på ei linje om og berre om $AC = BC$.

b. La ABC vere ein spissvinkla trekant med $AB < AC$. Punkta A_1 og A_2 ligg på linja BC slik at AA_1 og AA_2 er den indre, respektive ytre vinkelhalveringslinja i A i trekanten ABC. La A_3 vere speilbiletet til A_2 om punktet C, og la Q vere eit punkt på AA_1 slik at $\angle A_1QA_3 = 90°$. Vis at $QC \parallel AB$.

Oppgåve 4

Finn alle funksjonar $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at likninga

$$f(x)f(y) = |x - y| \cdot f\left(\frac{xy + 1}{x - y}\right)$$

er oppfylt for alle val av to forskjellige reelle tal x og y.