Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2015–2016. *Løsninger*

Finale 1. mars 2016

Oppgave 1.

Fargelegg et 2016×1010-rutenett som et sjakkbrett, med rute (i, j) hvit når $i + j$ er et partall og svart når $i + j$ er et oddetall, der $i = 1, 2, \ldots, 2016$ og $j = 1, 2, \ldots, 1010$. For en vandrende følge $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$ vil alle rutene med koordinater (i, a_i) ha samme farge. Man ser lett at to vandrende følger på samme farge aldri kan krysse hverandre uten å møtes. Det vil si, om a_i og a_i' er to slike følger med $a_i \neq a_i'$ for alle i, så er enten $a_i < a_i'$ for alle i, eller så er $a_i > a_i'$ for alle i.

La nå $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $\ldots$, $b_{1008} = b_{1009} = 1009$, $b_{1010} = 1008$, $b_{1011} = 1007$, $\ldots$, $b_{2016} = 2$. Merk at rute (i, b_i) er svart for $i = 1, 2, \ldots, 1008$, og hvit for $i = 1009, 1010, \ldots, 2016$. Og ikke bare det – de to delfølgene $b_1, \ldots, b_{1008}$ og $b_{1009}, \ldots, b_{2016}$ er begge vandrende.

Dersom $a_1, \ldots, a_{2016}$ er en vandrende følge som går på svarte ruter med $a_i \neq b_i$ for alle i, må for det første $a_1 > 2$, siden $(1, 1)$ er en hvit rute. Det følger at $a_i > b_i$ for $i = 1, \ldots, 1008$. Spesielt må $a_{1008} = 1010$, men det er umulig fordi $(1008, 1010)$ er en hvit rute.

Tilsvarende, om $a_{1009}, \ldots, a_{2016}$ er en vandrende følge på hvite ruter med $a_i \neq b_i$ for alle i, må for det første $a_{1009} < 1009$, og det føler at $a_i < b_i$ for $i = 1009, \ldots, 2016$. Igjen får vi en motsigelse, denne gangen fordi rute $(2016, 1)$ er svart.

Oppgave 2.

a. Anta først at $a \geq 2$ og $c \geq 2$. Da er

$$a + b = cd \geq 2d \geq c + d = ab \geq 2b \geq a + b,$$

så alle ulikhetene vi brukte må være likheter. Dette gir løsningen $(a, b, c, d) = (2, 2, 2, 2)$.

Ellers må enten $a = 1$ eller $c = 1$. Anta derfor $a = 1$. Da blir

$$1 + b = cd, \quad c + d = b,$$

som gir $cd = c + d + 1$. Det kan omformes til $(c - 1)(d - 1) = 2$. Siden $1 \leq c \leq d$, må derfor $c = 2$ og $d = 3$, og da blir $b = c + d = 5$. Dette gir løsningen $(a, b, c, d) = (1, 5, 2, 3)$.

Tilfellet $c = 1$ blir likt tilfellet $a = 1$ om vi bytter om (a, b) og (c, d), og det gir løsningen $(a, b, c, d) = (2, 3, 1, 5)$.

En enkel kontroll viser at alle løsningene er korrekte.

Alternativ løsning. Legger vi sammen likningene og omformer, får vi

$$(a - 1)(b - 1) + (c - 1)(d - 1) = 2$$

Siden parentesene ikke er negative, har vi opp til symmetri to muligheter, $0 + 2$ og $1 + 1$. Summen $1 + 1$ krever umiddelbart at alle parenteser er lik 1, så $(a, b, c, d) = (2, 2, 2, 2)$. Om summen er $0 + 2$, må $a = 1$, $c = 2$ og $d = 3$. Det følger at $b = 5$, så $(a, b, c, d) = (1, 5, 2, 3)$. Ved symmetri er også $(a, b, c, d) = (2, 3, 1, 5)$ en mulighet (med sum $2 + 0$). Innsetting bekrefter at alle tre er løsninger.

b. Vi faktoriserer først høyresiden:

$$x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

Ved regning modulo 2 får vi at x må være et partall, og vi skriver $x = 2x_1$. Setter vi inn dette og deler på 2 får vi en likning som likner veldig på den opprinnelige likningen:

$$4x_1^3 + y^3 + 2z^3 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

Vi gjentar argumentasjonen seks ganger til, og substituerer i tur og orden $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, $x_1 = 2x_2$, $y_1 = 2y_2$, $z_1 = 2z_2$ og $x_2 = 2x_3$, og får likningen

$$4x_3^3 + y_2^3 + 2z_2^3 = 3^4 \cdot 5 \cdot 7$$

Hvis vi regner modulo 9 ser vi at n^3 kun kan ha verdiene 0, 1 og -1 (fordi $(3m + k)^3 = (3m)^3 + 3 \cdot (3m)^2 \cdot k + 3 \cdot (3m) \cdot k^2 + k^3 \equiv k^3 \bmod 9$ med $k = 0$ eller $k = \pm 1$). Derfor kan venstresiden kun ha verdien 0 modulo 9 hvis alle leddene er 0, og dette skjer kun når alle tre er delelig på 3. Vi skriver $y_2 = 3a$, $z_2 = 3b$ og $x_3 = 3c$. Innsetting gir $4(3c)^3 + (3a)^3 + 2(3b)^3 = 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, som forkortes til

$$a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105.$$

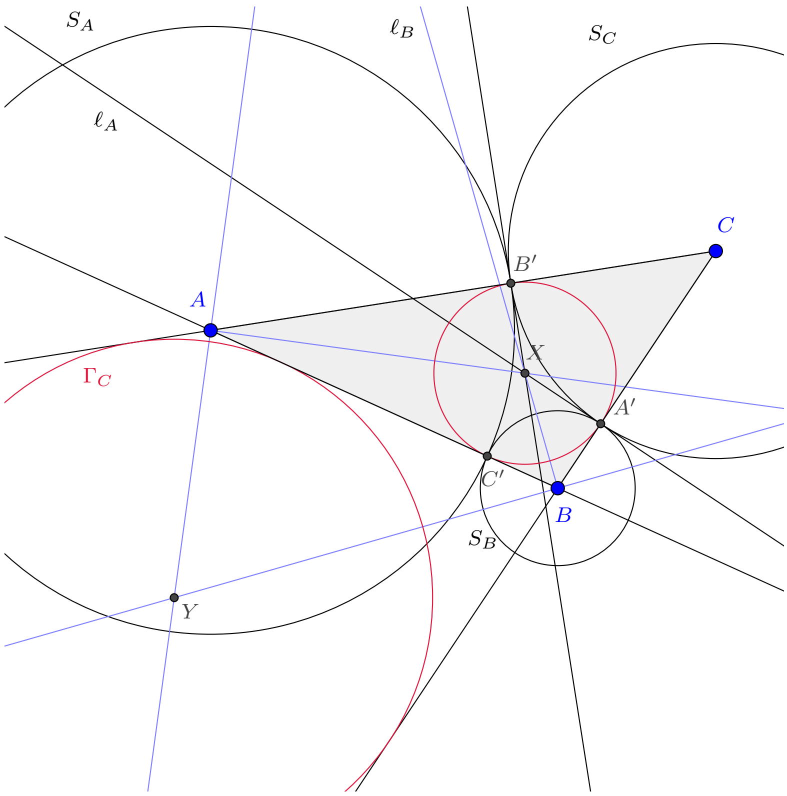
Siden vi bare godtar positiv heltall som løsninger, er hvert av leddene på venstresiden mindre enn 105. Når vi i tillegg tar i betraktning at a må være et oddetall, gir det kun mulighetene

$$a^3 \in \{1, 27\}, \quad 2b^3 \in \{2, 16, 54\}, \quad 4c^3 \in \{4, 32\}.$$

Det er videre klart at om $a^3 = 1$ eller $4c^3 = 4$, blir summen for liten, så $a^3 = 27$ og $4c^3 = 32$ er eneste mulighet. Men det gir ikke rett sum for noen mulige verder av $2b^3$. Likningen har derfor ingen løsninger.

Oppgave 3.

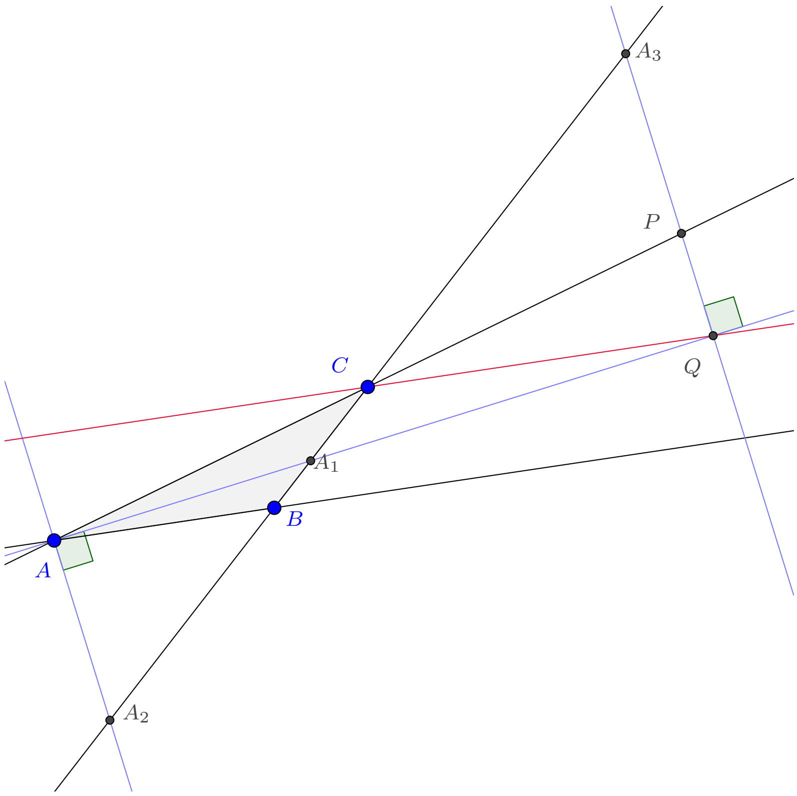
a. Merk først at det at S_A, S_B, S_C tangerer i A', B', C' er ekvivalent med at A', B', C' er tangeringspunktene mellom $\triangle ABC$ og trekantens innsirkel. Fordi X er skjæringspunktet mellom normalen til AC gjennom B' og BC gjennom A', medfører dette at X er innsenteret i $\triangle ABC$, og at AX, BX er vinkelhalveringslinjene. Derfor er også Y sentrum i utsirkelen Γ_C.



Siden innsirkelen og Γ_C begge tangerer AB, ligger X, C' og Y på linje hvis og bare hvis de to tangeringspunktene faller sammen (noe de ikke gjør i figuren).

Avstanden fra A til tangeringspunktet mellom innsirkelen og linjestykket AB er $s-a$, der $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, $a = BC$, $b = CA$ og $c = AB$. Likeledes er avstanden fra A til tangeringspunktet mellom Γ_C og AB lik $s-b$, så de to tangeringspunktene faller sammen hvis og bare hvis $s-a = s-b$, som er ekvivalent med $a = b$. Vi er derfor ferdige.

b. Siden AA_1 og AA_2 er vinkelhalveringslinjene i A, er $\angle A_2AA_1 = 90°$. Så $\angle A_2AQ = \angle AQA_3$, og derfor $A_3Q \parallel A_2A$. For å vise at $QC \parallel AB$ er det nok å vise at $\angle CQA = \angle QAB$. Ettersom $\angle QAB = \angle QAC$ er det nok å vise at $\triangle CQA$ er likebent. La P være speilingen av A gjennom C. Siden A_3 er speilingen av A_2, vil $A_3P \parallel A_2A$. Så P ligger på A_3Q, og siden $\angle PQA = 90°$, vil sirkelen med C som sentrum og AP som diameter også gå gjennom Q. Dette viser at $|CQ| = |CA|$, og vi er i mål.



Oppgave 4.

Åpenbart vil $f(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ være en løsning.

Legg først merke til at

$$\frac{xy+1}{x-y} = z \quad \text{hvis og bare hvis} \quad xy + zy - xz + 1 = 0.$$

(Om høyresiden holder, er $x \neq y$, for ellers måtte $x^2 + 1 = 0$.) Den gitte funksjonallikningen kan altså skrives som

$$f(x)f(y) = |x-y|f(z) \qquad \text{når } xy + zy - xz + 1 = 0.$$

Dersom det finnes en $z \in \mathbb{R}$ med $f(z) \neq 0$, kan vi for enhver $y \neq z$ løse $xy + zy - xz + 1 = 0$ med hensyn på x, og da følger at $f(y) \neq 0$. Så $f(x) \neq 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$. For hver $y \in \mathbb{R}$ løser vi $xy + zy - xz + 1 = 0$ med kravet $x = z$. Det gir $2xy - x^2 + 1$, med to løsninger. Vi nøyer oss med den ene: $x = z = y + \sqrt{y^2+1}$. For denne x-verdien blir da $f(x)f(y) = |x-y|f(x)$, og fordi $f(x) \neq 0$, blir

$$f(y) = |x-y| = \sqrt{y^2+1}.$$

Innsetting bekrefter at også $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ for alle $x \in \mathbb{R}$ er en løsning.

Alternativ løsning. To anvendelser av funksjonallikningen gir

$$f(0)f(x) = |x|f\left(-\frac{1}{x}\right), \quad f(x)f\left(-\frac{1}{x}\right) = \left|x + \frac{1}{x}\right|f(0).$$

Den første av disse gir umiddelbart at dersom $f(0) = 0$, så er $f(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Så vi antar at $f(0) \neq 0$, og kombinerer de to likningene over til

$$f(0)f(x)^2 = |x|f(x)f\left(-\frac{1}{x}\right) = (x^2+1)f(0),$$

og derfor $f(x) = \pm\sqrt{x^2+1}$ for alle x.

Dersom vi bytter om x og y i funksjonallikningen, får vi umiddelbart at

$$f(-z) = f(z) \qquad \text{der } z = \frac{xy+1}{x-y}.$$

Men her kan z ta alle reelle verdier, så $f(-x) = f(x)$ for alle x. Dette sammen med funksjonallikningen med $y = -x$ gir

$$0 \leq f(x)f(-x) = |2x|f(z) \qquad \text{der } z = \frac{-x^2+1}{2x},$$

men her kan z ta alle reelle verdier, så det følger at $f(z) \geq 0$ for alle $z \in \mathbb{R}$. Vi må altså velge plusstegnet i $f(x) = \pm\sqrt{x^2+1}$.