Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
2015–2016. *Løsninger*

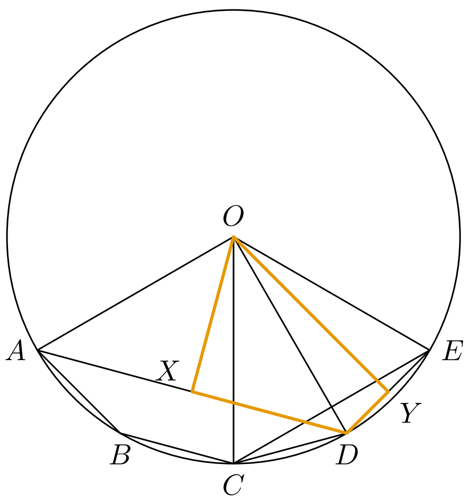
Andre runde 14. januar 2016

Oppgave 1. Start med å faktorisere: $a^3+a^2b-ab^2-b^3 = a^2(a+b)-b^2(a+b) = (a-b)(a+b)^2$. Så $(a-b)(a+b)^2 = 2^{10}$, og derfor $a-b = 2^m$ og $a+b = 2^n$ der m og n er positive heltall med $m+2n = 10$. Videre er $m < n$ fordi $a-b < a+b$. Det gir $10 = m + 2n > 3m$, så $m \leq 3$. Men $m = 10 - 2n$ er et partall, så $m = 0$ eller $m = 2$. Hvis $m = 0$ er $n = 5$, $a - b = 1$ og $a + b = 2^5 = 32$. Men da er $a = 33/2$, som ikke er et heltall. Med $m = 2$, derimot, blir $n = 4$, $a - b = 2^2 = 4$ og $a + b = 2^4 = 16$. Det gir $a = (16 + 4)/2 = 10$. **10**

Oppgave 2. Omsirkelen har hypotenusen BC som diameter fordi $\angle BAC = 90°$. Siden arealet til en sirkel med diameter d er $\frac{\pi}{4}d^2$, gir Pytagoras at arealet til omsirkelen er summen av arealene til sirklene med diameter AB og AC, altså $283 + 282 = 565$. **565**

Oppgave 3. To divisorer betyr at tallet er et primtall: 2, 3 ,5 ,7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 eller 31, altså $C = 11$. Tre divisorer betyr at tallet må være kvadratet av et primtall: 4, 9, 25, altså $B = 3$. Et tall med fire divisorer er enten tredje potens til et primtall (8 eller 27) eller produktet av to forskjellige primtall (6, 10, 14, 22, 26, 15 eller 21), altså $A = 9$. Produktet av alle tre blir $ABC = 297$. **297**

Oppgave 4. Dersom senteret til sirkelen kalles O, og X og Y er midtpunktene på henholdsvis AD og DE, følger at $\angle XOY = 60°$, fordi summen av vinklene i firkanten $OXDY$ er $360°$ og de andre vinklene er $90°$, $120°$ og $90°$. Ettersom OX og OY er symmetriakser i de likebente trekantene AOD og DOE, er $\angle AOE$ dobbelt så stor, altså $120°$. Det følger at hver av sirkelbuene AB, BC, CD og DE spenner over $30°$ av sirkelen. Summen av vinklene i den likebente trekanten COD er $180°$, så $\angle CDO = (180° - 30°)/2 = 75°$. Det samme gjelder $\angle EDO$, og summen av de to blir $\angle CDE = 150°$.



Alternativt kan man utnytte at $\angle ADE = 120°$ er en periferivinkel, og den tilhørende dobbelt så store sentralvinkelen er $\angle EOA$. Men dette blir sirkelbuen fra E til A over toppen av figuren, så sirkelbuen fra A gjennom B, C og D til E blir $360° - 240° = 120°$. Deretter fortsetter løsningen som ovenfor. **150**

Oppgave 5. Ulikheten kan skrives om til $(x+y-1)^2 \le 0$, så $x+y=1$. Det følger derfor fra den gitte likningen at $y-x = (y-x)(y+x) = y^2-x^2 = \frac{1}{3}$, så $y = \frac{2}{3}$ og $x = \frac{1}{3}$, og dermed $y/x = 2$. **2**

Oppgave 6. Skriv om likningen til $2016 = xy$, der $x = a+b$ og $y = b-a$. Heltallene x og y har samme paritet, og siden 2016 er et partall må både x og y være partall. Omvendt vil enhver faktorisering $2016 = xy$ med x og y partall og $x > y > 0$ gi en positiv løsning $a = (x-y)/2$, $b = (x+y)/2$ til $2016 + a^2 = b^2$. Merk at $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. I enhver faktorisering $2016 = xy$ i partall x, y må $x = 2^i 3^j 7^k$ og $y = 2^{5-i} 3^{2-j} 7^{1-k}$ der $1 \le i \le 4$, $0 \le k \le 2$ og $0 \le k \le 1$. Det gir $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ forskjellige løsninger, og på grunn av symmetrien vil $x > y$ i nøyaktig halvparten av disse. (Vi får aldri $x = y$, for 2016 er ikke et kvadrattall.) **12**

Oppgave 7. Kall det gitte tallet x. Multiplikasjon og divisjon med $\sqrt{111 \cdot 112} + 111$ gir $x = 4(\sqrt{111 \cdot 112} + 111) \approx 4(111\frac{1}{2} + 111) = 890$. Avviket i tilnærmingen kan estimeres slik:

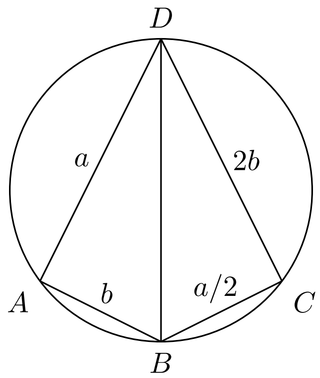
$$4(111\tfrac{1}{2} - \sqrt{111 \cdot 112}) = 4\frac{(111\frac{1}{2})^2 - 111 \cdot 112}{111\frac{1}{2} + \sqrt{111 \cdot 112}} = \frac{1}{111\frac{1}{2} + \sqrt{111 \cdot 112}} < \frac{1}{2}$$

– med *svært* god margin i den siste ulikheten.

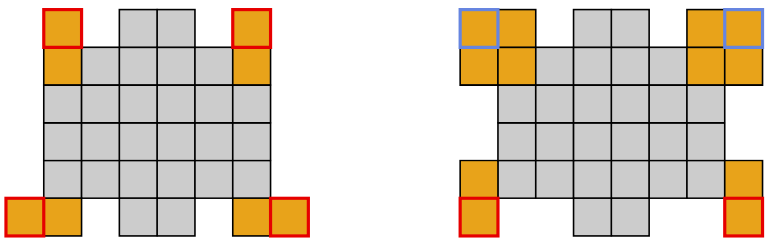
Alternativ løsning: Likningen $\sqrt{111 \cdot 112} = 111(1 + 4/x)$ kvadrerert gir $111 \cdot 112 = 111^2(1 + 8/x + 16/x^2)$, som forenkles til $1 = 111(8/x + 16/x^2)$. Multiplisert med x gir det $x = 888(1 + 2/x)$. Det gir først $x > 888$, som innsatt på høyresiden gir $x < 888(1 + \frac{2}{888}) = 890$. Innsatt på ny gir det $x > 888(1 + \frac{2}{890}) = 890 - \frac{4}{890}$. **890**

Oppgave 8. Loppen har to valgmuligheter for hvert av åtte hopp, så det er i alt $2^8 = 256$ mulige ulike økter. Den totale lengden av de første $k-1$ hoppene er $2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 2$, mens lengden av det k-te hoppet er 2^k. Så hvis det k-te hoppet går til høyre, er posisjonen etterpå ≥ 2, men hvis det går til venstre, er posisjonen etterpå ≤ -2. Spesielt er posisjonen etter k hopp forskjellig i to økter der det k-te hoppet går i hver sin retning. Denne situasjonen vedvarer dersom etterfølgende hopp går samme vei, og det følger at forskjellige økter gir forskjellig sluttposisjoner. Antall forskjellige sluttposisjoner er derfor lik antall forskjellige økter. **256**

Oppgave 9. Siden $\angle BAD$ er rett, er BD en diameter til sirkelen. Men av det følger at også $\angle BCD$ er rett. Pytagoras andvendt på de rettvinklede trekantene ABD og CBD gir at $a^2 + b^2 = (a/2)^2 + (2b)^2$, slik at $a = 2b$. Begge de to rettvinklede trekantene har areal $\frac{1}{2}ab = b^2$, og dermed blir det totale arealet til firkanten lik $2b^2$. For at dette arealet skal være mindre enn 1000, må $b^2 < 500$. Siden $22^2 < 500 < 23^2$, kan heltallet b maksimalt være 22, og arealet blir da $2 \cdot 22 \cdot 22 = 2 \cdot 484 = 968$. **968**



Oppgave 10. I begge figurene er det noen felt, markert med rødt omriss, som bare har ett nabofelt hver. Dominobrikken som dekker et slikt felt, må da også dekke nabofeltet. I den venstre figuren må altså fire brikker plasseres som antydet. I den høyre figuren må to brikker plasseres som vist nederst. Men det er to mulige plasseringer, horisontalt eller vertikalt, for den dominobrikken som skal dekke hjørnefeltet øverst til venstre (med blått omriss). Da må en annen brikke legges slik at de to tilsammen dekker det fargelagte 2×2-kvadratet. Tilsvarende gjelder øvre høyre hjørne. Den grå delen er lik i de to figurene. I den venstre figuren er det ikke andre valgmuligheter enn i den grå delen, så M er antall måter å dekke denne på. I den høyre figuren har vi $2 \cdot 2 = 4$ måter å dekke de fargete feltene på og M måter å dekke de grå på, så $N = 4M$.



. . . . **4**