ABEL KONKURRANSEN

Nynorsk

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2016–2017

Finale 7. mars 2017

I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (seks punkt) som skal løysast på fire timar. Svara skal grunngivast og førast på eigne ark. **Begynn på nytt ark for kvar av dei fire oppgåvene.**

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Maksimal poengsum er såleis 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir, skrivereiskapar og tospråklege ordbøker er tillatne.

Oppgåve 1

a. Finn alle funksjonar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er slik at

$$f(x)f(y) = f(xy) + xy$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

b. Finn alle funksjonar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er slik at

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Oppgåve 2

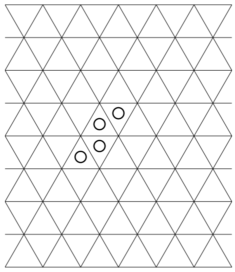
La følgja a_n vere definert ved $a_0 = 2$, $a_1 = 15$ og $a_{n+2} = 15a_{n+1} + 16a_n$ for $n \geq 0$. Vis at det finst uendeleg mange heiltal k slik at $269 \mid a_k$.

Oppgåve 3

a. Nils har eit telefonnummer med åtte ulike siffer. Han har laga 28 kort med utsegn av typen «Sifferet a kjem før sifferet b i telefonnummeret mitt» – eitt for kvart par av siffer som finst i nummeret hans.

Kor mange kort kan Nils visa deg utan å avsløra kva nummeret hans er?

b. I eit uendeleg nett av regulære trekantar spelar Niels og Henrik eit spel dei har laga. Annan kvar gong vel Niels ei rute og skriv $\times$ i denne, og annan kvar gong vel Henrik ei rute der han skriv ein $\circ$. Om ein av spelarane får fire på rad i ei retning (se figur), vinn han spelet.



Avgjer om ein av spelarane kan tvinga ein siger, eller om begge spelarane kan hindre den andre i å vinne.

Oppgåve 4

La $a > 0$ og $0 < \alpha < \pi$ vere gitt. La ABC vere ein trekant med $BC = a$ og $\angle BAC = \alpha$, og kall omsenteret for O, og ortosenteret for H. Punktet P ligg på strålen frå A gjennom O. La S vere speilbiletet til P om AC, og T speilbiletet til P om AB. Anta at $SATH$ er syklisk. Vis at lengda AP kun er avhengig av a og α.