Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Finale 2016–2017 – *Løsninger*

7. mars 2017

Oppgave 1.

a. Setter vi $x = y = 1$, får vi $f(1)^2 = f(1) + 1$. Så $a = f(1)$ er en av løsningene til likningen $a^2 - a - 1 = 0$, som gir $a = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Merk at $a \neq 1$. Setter vi bare $y = 1$ i funksjonallikningen, får vi $f(1)f(x) = f(x) + x$. Dette gir $f(x) = \frac{x}{a-1} = ax$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Innsetting i funksjonallikningen gir $ax \cdot ay = axy + xy$, dvs. $(a^2 - a - 1)xy = 0$, som er oppfylt for begge a-verdiene. Funksjonallikningen har derfor de to løsningene $f(x) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\,x$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og $f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\,x$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

b. *Alternativ 1.* Med $y = 0$ får vi $f(0)f(x) = f(x)$. Siden $f(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ ikke passer, må $f(0) = 1$. Med $x = y = 1$ får vi $f(1)^2 = f(2) + 1$. Lar vi $a = f(1)$, får vi $f(2) = a^2 - 1$. Setter vi $y = 1$ eller $y = 2$ i funksjonallikningen, får vi likningene

$$af(x) = f(x+1) + x$$
$$(a^2 - 1)f(x) = f(x+2) + 2x$$

Erstatter vi x med $x + 1$ i den første, får vi

$$f(x+2) = af(x+1) - (x+1) = a\big(af(x) - x\big) - x - 1 = a^2 f(x) - ax - x - 1$$

Innsatt i den andre får vi

$$(a^2 - 1)f(x) = a^2 f(x) - ax - x - 1 + 2x$$

som vi løser for $f(x)$ og får $f(x) = 1 + (a - 1)x$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Setter vi nå $x = 2$, får vi likningen $a^2 - 1 = 1 + 2(a - 1)$, dvs. $a^2 = 2a$, med løsningene $a = 0$ eller $a = 2$. Vi får dermed de to løsningene $f(x) = 1 + x$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og $f(x) = 1 - x$ for alle $x \in \mathbb{R}$. En kontroll gir at

$$f(x)f(y) = (1 \pm x)(1 \pm y) = 1 \pm (x + y) + xy = f(x + y) + xy,$$

så begge funksjonene passer.

Alternativ 2. Etter $f(0) = 1$, sett $(x, y) = (1, -1)$. Dette gir likningen $f(1)f(-1) = f(0) - 1 = 0$, så $f(1) = 0$ eller $f(-1) = 0$. Anta $f(1) = 0$. Med $y = 1$ får vi $f(x + 1) + x = 0$, som gir $f(x) = 1 - x$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Anta $f(-1) = 0$. Med $y = -1$ får vi $f(x - 1) - x = 0$, som gir $f(x) = 1 + x$ for alle $x \in \mathbb{R}$. En kontroll viser at begge funksjonene er gyldige løsninger.

Oppgave 2. Den karakteristiske ligningen til rekursjonen er $0 = x^2 - 15x - 16 = (x-16)(x+1)$, altså er $a_n = c_1(-1)^n + c_2 16^n$. Ved å sette inn $n = 0$ og $n = 1$ får man $c_1 = c_2 = 1$. Med andre ord er $a_k = (-1)^k + 16^k = (-1)^k + 2^{4k}$. Målet er å få dette uttrykket til å bli kongruent med 0 modulo 269. Men 269 er et primtall, og $(-1)^k$ alternerer mellom pluss og minus 1. Av Fermats lille sats får vi at for $m = 269 - 1 = 268 = 4 \cdot 67$ blir $2^m \equiv 1$ modulo 269. Hvis vi altså velger $k = (2b+1)67$ får vi

$$a_k \equiv (-1)^{(2b+1)67} + 2^{4\cdot 67(2b+1)} \equiv (-1) + 1^{(2b+1)} \equiv 0$$

modulo 269.

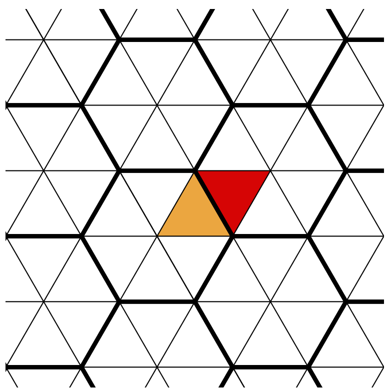
Oppgave 3.

a. Nils kan vise deg 27 kort (eller færre) uten å avsløre nummeret sitt. Hvis Nils velger å vise deg alle kortene bortsett fra det som forteller om rekkefølgen til to nabosiffer, kan ikke de andre kortene brukes til å avgjøre hvilket av nabosifrene kommer først.

Spesielt kan han velge å vise alle kortene bortsett fra det som omhandler de to siste sifrene. Hvis disse er x og y vil alle kortene du ser bare fortelle deg at alle de andre sifrene kommer før både x og y, og du har ingen måte å vite hvilket av disse som kommer sist.

Hvis du får se alle kortene vil det være ett siffer som kommer før alle de andre. Du kan skrive ned dette sifferet, og legge bort kortene som omhandler dette sifferet. Slik kan du fortsette til du har skrevet ned hele nummeret. Derfor kan ikke Nils vise deg alle de 28 kortene uten å avsløre nummeret sitt.

b. Slå sammen trekantene seks og seks til et gitter av sekskanter. Legg merke til at det ikke er mulig å få fire på rad innenfor én sekskant.



Anta at Niels begynner. Henrik kan hindre Niels i å vinne: Hver gang Niels setter sitt merke i en trekant (som den oransje i figuren), setter Henrik sitt merke i den nabotrekanten som også ligger i en nabosekskant (rød i figuren). På den måten hindrer han at Henrik noen gang får to slike nabotrekanter, og siden fire på rad nødvendigvis må krysse fra en sekskant til den neste, kan han derfor aldri få fire på rad.

Niels kan også hindre Henrik i å vinne. Dette er intuitivt opplagt, for et ekstra merke kan aldri skade – men vi kan argumentere mer formelt slik: Niels begynner med å sette et merke i en tilfeldig trekant. Deretter later han som om det merket ikke eksisterer, og spiller Henriks strategi som forklart ovenfor. Hvis strategien krever at han setter et merke der det første merket står, setter han bare et merke i en ny tilfeldig trekant, og fortsetter.

Oppgave 4. Skriv $\beta := \angle ABC$, $\gamma := \angle BCA$, $b := CA$ og $c := AB$. Da er $\angle OAC = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = 90^\circ - \frac{\angle AOC}{2} = 90^\circ - \beta$, mens $\angle HAC = 90^\circ - \gamma$. Derav følger $\angle HAS = \angle HAC + \angle CAS = \angle HAC + \angle CAP = 180^\circ - \gamma - \beta = \alpha$. På samme måte får man $\angle HAT = \alpha$. Siden $AT = AP = AS$, er SAT likebent, og midtnormalen til ST faller sammen med vinkelhalveringslinjen fra A. Men av $\angle HAS = \angle HAT$ følger at dette er linjen AH. Med andre ord ligger omsenteret til $SATH$ på linjen AH, hvorav vi kan slutte at AH er en diameter. Dette gir at $AP = AS = AH \cdot \cos \angle HAS = AH \cdot \cos\alpha$. La B_1 være fotpunktet til høyden fra B. Ved å utnytte at BB_1A og HB_1A begge er rettvinklede, får vi $AH = AB_1/\cos(\angle HAC) = AB_1/cos(90^\circ - \gamma) = AB_1/\sin\gamma =$ og $AB_1 = AB\cos\alpha$, hvorav $AH = \frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha}$, og derfor $AP = a\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$.