Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2016–2017. *Løsninger*

Første runde 10. november 2016

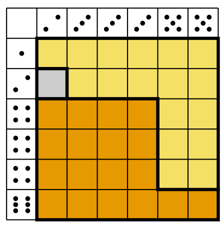
Oppgave 1. For fire av tallene vil noen få desimaler avgjøre rekkefølgen: $A = 0{,}1314\ldots$, $B = 0{,}15$ (oppgitt), $D = 0{,}1333\ldots$, og $E = 0{,}125$. E er den minste av disse. I tillegg er $E < C$, fordi $E^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$ og $C^2 = \frac{1}{50}$. **E**

Oppgave 2. Primtallsfaktorisering gir $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, så de positive divisorene til 300 er alle tall på formen $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$ med $i \in \{0, 1, 2\}$, $j \in \{0, 1\}$ og $k \in \{0, 1, 2\}$. Det er $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ mulige kombinasjoner av disse eksponentene. . . . . **D**

Oppgave 3. Rådhuset og skolen kan hver plasseres i en av fire bydeler, uavhengig av hverandre. Det gir $4 \cdot 4 = 16$ muligheter. For hver av disse er det tre mulige plasseringer av kinoen. I alt er det da $16 \cdot 3 = 48$ muligheter. . . . . **D**

Oppgave 4. Om radiene i de to sylindrene heter r_1 og r_2, og høydene heter h_1 og h_2, så sier den første betingelsen at $r_1^2 h_1 = r_2^2 h_2$. Vi kan tilfredsstille det andre kravet ved å sette $h_1 = r_2 = 1$. I så fall må vi ha $r_1^2 = h_2$, der r_1 kan velges fritt. Altså kan $h_2/r_1 = r_1$ ha hvilken som helst positiv verdi. . . . . **E**

Oppgave 5.



De mulige utfallene kan oppsummeres i 6×6-matrisen til høyre, der verdien av P er gitt øverst og verdien av Q til venstre. Det grå kvadratet i $(2, 2)$ er eneste utfall som blir uavgjort, mens P vinner i de lyse feltene (17 i tallet) og taper i de mørke feltene (som det er 18 av). Dermed er det like sannsynlig at P taper som at P ikke taper. . . . . **C**

Oppgave 6. Linjestykket fra et hjørne i en trekant til midtpunktet på den motstående siden kalles en *median* til trekanten, og det er kjent at de tre medianene møtes i ett punkt. Derfor inneholder ikke oppgaven nok informasjon til å bestemme lengden av AB. Hvis du ikke kjenner denne setningen, kan det være nok å se på de to valgene $AB = 4$ og $AB = 5$. Begge de resulterende trekantene er likebente, og symmetrien i likebente trekanter gjør det ekstra lett å se at medianene møtes i ett punkt. . . . . **E**

Oppgave 7. Fargene og valørene er helt uavhengige, så Ahmed får ingen informasjon om farger i et trekk der Sanne peker ut kort av en gitt valør, eller omvendt. Siden det er mulig at alle n farger finnes blant kortene, må Sanne peke ut $n-1$ av dem for at Ahmed skal vite fargen på alle kortene. På samme måte må Sanne peke ut $m-1$ valører. I alt må hun da gjøre $(m-1)+(n-1)$ trekk. C

Oppgave 8. Summen av de horisontale linjene er $2AB = 2 \cdot 30 = 60$. Nå er $AH = BC - DE + FG$, så summen av de vertikale linjene er $BC + DE + FG + AH = BC + DE + FG + (BC - DE + FG) = 2BC + 2FG = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 10 = 52$. Summen blir $60 + 52 = 112$. . . . . D

Oppgave 9. $2016 \cdot 5^{100} = 32 \cdot 63 \cdot 5^{100} = 5^{95} \cdot 63 \cdot 10^5$ ender med eksakt fem nuller, siden $5^{95} \cdot 63$ ikke er delelig med 10. . . . . A

Oppgave 10. Legg først merke til at $11 \cdot 13 < 12^2$. Det gir $D^2 = \frac{1}{4}\big(11 + 13 + 2\sqrt{11 \cdot 13}\big) < \frac{1}{4}(24 + 2 \cdot 12) = 12 = B^2$. Videre er $C^2 = \frac{49}{4} > \frac{48}{4} = 12 = B^2$, og $A^2 = \pi^2 < 3{,}2^2 = 10{,}24 < 11$ gir $A < \sqrt{11} < D$. Samlet til nå har vi $A < D < B < C$. Den som kjenner ulikheten mellom aritmetisk og harmonisk middel, vet at $E < D$. Det kan en også se slik, etter å sette brøkene i $1/E$ på fellesnevner:

$$\frac{D}{E} = \frac{\big(\sqrt{11} + \sqrt{13}\big)^2}{4\sqrt{11 \cdot 13}} = \frac{11 + 2\sqrt{11 \cdot 13} + 13}{4\sqrt{11 \cdot 13}} = \frac{1}{2} + \frac{24}{4\sqrt{11 \cdot 13}} > \frac{1}{2} + \frac{24}{4 \cdot 12} = 1.$$

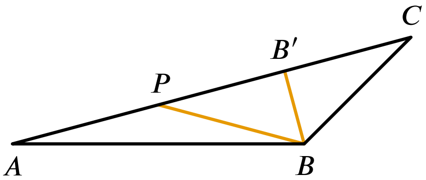
Altså må D stå i midten. . . . . D

Oppgave 11. k må være et partall, for ellers vil $15k$ ende på 5. La oss si $k = 2n$, så $15k = 30n$. Da må også $3n$ bare inneholde sifrene 0 og 1. Men tverrsummen i et slikt tall er antall enere, og siden tverrsummen av $3n$ er delelig med 3, er $3n = 111$ minste mulighet. Dermed er $k = 2n = 2 \cdot 37 = 74$, med tverrsum 11. . . . . E

Oppgave 12. Mengden $\{1, 2, \ldots, 2016\}$ inneholder 2016 tall, og 1008 av dem er partall, så mengden har 2^{2016} delmengder og 2^{1008} delmengder som bare består av partall. Dermed vil $2^{2016} - 2^{1008}$ av dem inneholde minst ett oddetall. C

Oppgave 13. n er $\frac{1}{6}$ pluss en sum av fem tall som alle er mindre enn $\frac{1}{6}$. Derfor er $n < 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$, så $n^2 < n < 1/n < 1/n^2$. . . . . B

Oppgave 14.



Vinkelsummen i en trekant er 180°, så $\angle C = 180^\circ - 15^\circ - 135^\circ = 30^\circ$. La B' være fotpunktet av normalen fra B på CA, og la P være speilingen av C i B'. Da er $\triangle PBC$ likebent. Spesielt er $\angle BPC = \angle BCP = 30^\circ$, så $\angle PBC = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$, og $\angle ABP = \angle ABC - \angle PBC = 135^\circ - 120^\circ = 15^\circ = \angle BAP$. Dermed er også $\triangle APB$ likebent, og vi har $AP = PB = BC = 1$. $\triangle CB'B$ har vinkler 30°, 90° og 60°, så $B'C = PB' = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, og $AC = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$. . . . . **B**

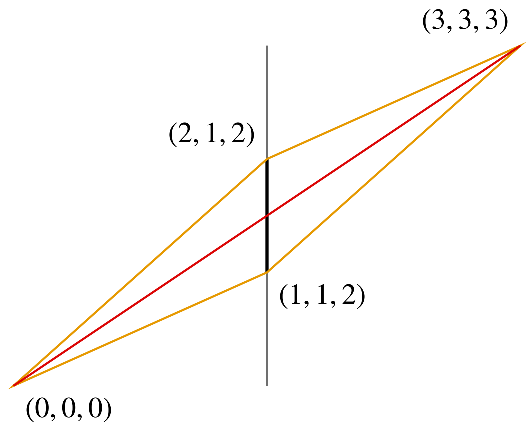
Oppgave 15. Om det ukjente uttrykket kalles x, må $x = \sqrt{6 + x}$. Kvadrér ligningen og flytt over x: $x(x-1) = 6$. Denne ligningen har løsninger $x = 3$ og $x = -2$. Den negative løsningen må forkastes fordi x er en kvadratrot. . . . . **D**

Oppgave 16. Produktet P har 4032 faktorer, symmetrisk plassert om 0 (for hver faktor a er også $-a$ en faktor). Det er 2016 negative faktorer, så produktet er positivt. Dermed blir $P = Q^2$, der $Q = x(x-1)\cdots(x-2015)$. Så er $2^{2016}Q = 4031 \cdot 4029 \cdot 4027 \cdots 3 \cdot 1$. Multipliser med $4030 \cdot 4028 \cdots 2 = 2^{2015} \cdot 2015!$, med resultat $2^{2016} \cdot 2^{2015} \cdot 2015! \cdot Q = 4031!$, så $Q = 4031!/(2^{4031} \cdot 2015!)$. . . . . **E**

Oppgave 17. Vi tenker oss at Anna og Birger starter i origo med positiv retning langs y-aksen. De går en total distanse $D = 1+2+4+\cdots+2^{2015} = 2^{2016}-1$. Birger går bare rett frem, og stopper i $x = 0$, $y = D$. Anna, derimot, går annenhver gang parallelt med y-aksen, og annenhver gang parallelt med x-aksen. Når vi tar hensyn til retningen, ender hun opp med $y = 1 - 4 + 2^4 - 2^6 + 2^8 - \cdots + 2^{2012} - 2^{2014} = 1-4+4^2-4^3+4^4-\cdots+4^{1006}-4^{1007} = (1-(-4)^{1008})/(1-(-4)) = \frac{1}{5}(1-2^{2016}) = -\frac{1}{5}D$, og tilsvarende $x = 2 - 8 + 2^5 - 2^7 + \cdots + 2^{2013} - 2^{2015} = 2y = -\frac{2}{5}D$. Avstanden mellom de to er da $d = \sqrt{(-\frac{2}{5}D)^2 + (\frac{6}{5}D)^2} = \frac{1}{5}D\sqrt{40}$, så $D/d = 5/\sqrt{40} = \frac{1}{4}\sqrt{10}$.
. . . . **A**

Oppgave 18. Vi trenger to egenskaper ved funksjonen S. Den ene er at $S(10^n) = n+1$, og den andre er at S er voksende, det vil si at om $m \le n$, så er $S(m) \le S(n)$. Da blir på den ene siden $S\big(S(2016^{2017})\big) \ge S\big(S(1000^{2017})\big) = S(3 \cdot 2017 + 1) = 4$, og på den andre siden $S\big(S(2016^{2017})\big) \le S\big(S(10000^{2017})\big) = S(4 \cdot 2017 + 1) = 4$.
. . . . **D**

Oppgave 19. Legg et koordinatsystem slik at fluen starter i origo og ender opp i $(3, 3, 3)$. Kassen i sentrum har hjørner der alle tre koordinatene er enten 1 eller 2. Sett fra fluens startpunkt er tre av kassens sider synlige, og omrisset av den ser ut som en sekskant. Disse seks kantene er også synlige fra destinasjonen, så korteste vei går fra origo i rett linje til et punkt på en av dem, og deretter i rett linje til destinasjonen. På grunn av symmetrien spiller det ingen rolle hvilken av de seks kantene fluen velger å fly til. La oss velge kanten mellom $(1, 1, 2)$ og $(2, 1, 2)$, så fluen flyr fra $(0, 0, 0)$ via $(x, 1, 2)$ til $(3, 3, 3)$, der $1 \le x \le 2$.



Tenk deg nå at du forlenger sidekanten mellom $(1, 1, 2)$ og $(2, 1, 2)$, og bretter et ark om denne linjen slik at $(0, 0, 0)$ og $(3, 3, 3)$ begge ligger på arket, på hver sin side av bretten. Når du bretter arket ut igjen, får du en figur som den over. De oransje linjene viser fluens rute om den flyr via ett av hjørnene i den indre kassen. Den korteste veien er den rette linjen (rød i figuren), gjennom $(\frac{3}{2}, 1, 2)$. Lengden av denne ruten blir $L = 2\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 + 2^2} = 2\sqrt{\frac{9}{4} + 5} = 2\sqrt{\frac{29}{4}} = \sqrt{29}$. . . . . . **B**

Oppgave 20. La $N = 6R + 5B + 4H$ når Nils har R røde, B blå og H hvite steiner. Endringen i N ved hvert av trekkene (1)–(5) er henholdsvis -3, -6, -3, -3 og -6. Siden $N \ge 0$ og N alltid avtar, kan ikke Nils holde på i det uendelige. Opprinnelig er $N = 15 \cdot 2015$, og det følger at N alltid er delelig med 3. Når ingen trekk lenger er mulige, er $B < 2$, for ellers kunne Nils gjøre trekk (2). Dersom $B = 1$ må $H = 0$, ellers kunne han gjøre trekk (1). Men $B = 1$ og $H = 0$ gir $N = 6R + 5$, som ikke er delelig med 3, så det er umulig. Altså må $B = 0$. Men så er $N = 4H$, og siden $H < 3$ fordi (5) ellers er mulig, må også $H = 0$. Endelig må $R < 2$, for ellers er (4) mulig. Men Nils kan ikke ende med $R = 0$, for han mottar minst én stein i hvert trekk. Altså må $R = 1$.

(Vi kunne også valgt $N = 2B + H$, men da kreves et separat argument for at prosessen må slutte. For eksempel dette: At det totale antall steiner aldri øker, og antall røde steiner minker når det totale antallet er uendret.) . . . . **A**