Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2016–2017.

Løsninger

Andre runde 12. januar 2017

Oppgave 1. Fordi $2016 = 32 \cdot 9 \cdot 7$, så er $2016k$ alltid delelig med hvert av de ønskede tallene bortsett fra 5 og 10. Men 2016 er ikke delelig med 5, så vi må ha $5 \mid k$, og da blir automatisk $10 \mid 2016k$, siden 2016 er et partall. Altså er det minste positive heltallet $k = 5$. **5**

Oppgave 2. La katetene i trekanten ha lengde a og b, og hypotenusen ha lengde c. Pytagoras gir at $a^2 + b^2 = c^2$. Videre er $ab = 2 \cdot 400 = 800$ og $a + b + c = 100$. Nå blir

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (100-c)^2 = 10000 - 200c + c^2, \\
(a+b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 1600,
\end{aligned}
$$

og derfor $200c = 10000 - 1600 = 8400$, altså $c = 42$. **42**

Oppgave 3. De tre hjørnene kan velges blant de tolv gitte punktene på i alt $\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 220$ måter. Fire av disse valgene består av tre punkt på samme side av kvadratet, men da blir ikke disse hjørnene til noen trekant, så det er bare $220 - 4 = 216$ muligheter.

Alternativt kan vi telle opp to typer trekanter: De med to hjørner på én av kvadratets sider er det $4 \cdot 3 \cdot (3 + 3 + 3) = 108$ av, og de med alle tre hjørner på hver sin side er det $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ av. (Vi står over detaljene.) **216**

Oppgave 4. Skriv $n - 14 = k^2$. Så må enten $n + 37 = (k+1)^2$ eller $n + 37 = (k+2)^2$. Den siste muligheten inntreffer bare hvis n selv er et kvadrattall. Men fordi $n - 14$ og $n + 37$ har motsatt paritet, mens k^2 og $(k+2)^2$ har samme paritet, er ikke det mulig. Vi har derfor $2k + 1 = (k+1)^2 - k^2 = n + 37 - (n - 14) = 51$, som gir $k = 25$. Derfor er $n = k^2 + 14 = 639$. **639**

Oppgave 5. På grunn av de parallelle linjene er forholdet mellom arealene til høyre og til venstre for delelinjen fra hjørnet i figuren konstant. Hvis A er arealet til det mørke området nederst til høyre, og B er arealet til området øverst til venstre, er altså

$$A : 12 = 700 : B = 210 : 60 = 7 : 2.$$

Dette gir $A = 42$ og $B = 200$, slik at $A + B = 242$. **242**

Oppgave 6. Det virker plausibelt at jentene kommer raskest frem dersom Cecilie tar med seg Anne på sykkelen, mens Beate begynner å gå. Så setter Cecilie av Anne før de er kommet frem, og Anne fortsetter å gå, mens Cecilie sykler tilbake og møter Berit, og tar henne med seg til skolen. For at dette skal bli optimalt, må de ordne seg slik at alle tre ankommer skolen samtidig, så ingen venter unødig. Det blir lettest å stille opp en ligning for dette om vi simpelthen merker oss at sykkelen går tre ganger raskere enn en fotgjenger. Tallene blir enkle om vi sier at Cecilie setter av Anne etter $6x$ kilometer. Da har Beate gått $2x$ kilometer, og avstanden mellom de to er $4x$ kilometer. Så når Cecilie har syklet $3x$ kilometer tilbake, har Beate gått x kilometer til, og de møtes. Nå har Beate gått $3x$ kilometer. Hun og Cecilie er $3 - 3x$ kilometer fra skolen, mens Anne nå er $3 - 7x$ kilometer fra skolen. Skal de nå frem samtidig, må $3 - 3x = 3(3 - 7x)$, så $x = \frac{1}{3}$. I alt har Beate syklet $6x + 3x + 3 - 3x = 5$ kilometer. Det har tatt henne $5/15 \cdot 60 = 20$ minutter.

At det ikke kan gjøres raskere, kan vi se slik: Skriv $D = 3A + 3B - C$, der A, B og C er avstanden Anne, Beate og Cecilie har igjen til skolen. Opprinnelig er $D = 15\,\text{km}$, og målet er å få $D = 0$ så raskt som mulig. Men D kan ikke avta raskere enn $45\,\text{km/h}$: Når Cecilie har med seg en av de andre på sykkelen, kan D avta med innil $3 \cdot 15 + 3 \cdot 5 - 15 = 45$ kilometer per time, og når hun ikke har det, kan D avta med inntil $3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 15 = 45$ kilometer per time. Dermed tar det minst $15/45 = 1/3$ time å få $D = 0$. **20**

Oppgave 7. La oss anta at øynene på terningene er svarte. Nå maler vi i tillegg røde øyne på hver terningside, slik at det til sammen er $n+1$ svarte og røde øyne på hver side av en terning med n sider. Men da vil sidene på en slik terning ha $1, 2, \ldots, n$ røde øyne, så enten vi teller svarte eller røde øyne, er sannsynlighetsfordelingen helt lik.

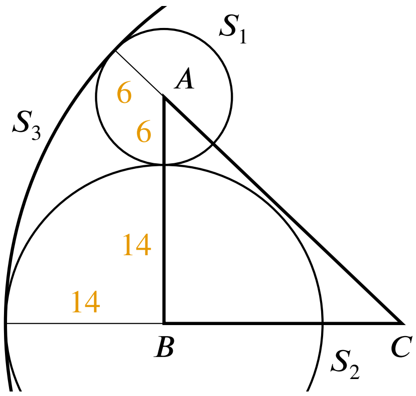
Dersom S er antall svarte øyne og R er antall røde øyne ved et gitt kast, er alltid $S + R = 5 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 13 + 4 \cdot 21 = 134$. Fordi fordelingene er like, er det like sannsynlig at $S < k$ som at $R < k$, som igjen er det samme som at $S > 134 - k$. Men vi har også fått vite at $S < k$ er like sannsynlig som $S > k$, så vi må ha $134 - k = k$, og derfor $k = 67$. (Dette argumentet krever at $S = 67$ er et mulig utfall, men det er det heldigvis.) **67**

Oppgave 8. Dersom n ender på eksakt k niere (med $k = 0, 1, 2$ eller 3), er $t(n+1) = t(n) + 1 - 9k$, så

$$a_{n+1} = a_n + 9k.$$

Dermed danner tallene $b_n = a_n/9$ en voksende følge av heltall som starter med $b_1 = 0$ og ender med $b_{2017} = 2007/9 = 223$. Tallene b_n inkluderer alle de 224 tallene fra 0 til 223, med unntak av noen få som hoppes over. Når n ender med to niere ($n = 99, 199, \ldots 899$ og $n = 1099, 1199, \ldots, 1899$), hopper følgen over ett tall mellom b_n og b_{n+1}. Og når n ender med tre niere ($n = 999$ og $n = 1999$), hopper den over to tall. I alt hopper den over $18 + 2 \cdot 2 = 22$ tall, og vi står igjen med $224 - 22 = 202$ forskjellige tall. **202**

Oppgave 9. La A, B og C være de tre sirkelsentrene (se figuren). Dersom r er radien til S_3, har trekanten ABC sider av lengde $6 + 14 = 20$, $r - 14$ og $r - 6$. Pytagoras gir $20^2 + (r-14)^2 = (r-6)^2$, med løsning $r = 35$. (Det *kunne* tenkes at S_1 ligger inni S_2, men da måtte alle de tre sirkelparene tangere hverandre i samme punkt, og så ville sirkelsentrene ligget på linje i stedet for å være hjørner i en rettvinklet trekant.) **35**



Oppgave 10. For positive tall a og b er $2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$, slik at $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. Med $a = \sqrt{x - 127}$ og $b = \sqrt{k - x}$ gir det $\sqrt{x - 127} + \sqrt{k - x} \leq \sqrt{2(k - 127)}$. Vi må derfor ha $\sqrt{2(k - 127)} \geq 13$, som gir $2(k - 127) \geq 169$, og $k \geq 127 + 169/2$. Siden k skal være et heltall, må $k \geq 127 + 170/2 = 212$. Med $k = 212$ viser det seg at $x = 163$ er en løsning.

Alternativt, mer likefrem men litt mer omstendelig, kan man kvadrere ligningen, isolere den gjenværende kvadratroten på den ene siden, og kvadrere på ny. Resultatet er en andregradsligning i x, som må ha diskriminant ≥ 0. Denne ulikheten løses så med hensyn på k. (Vi står over detaljene.) **212**