Niels Henrik Abels matematikkonkurranse: Finale 2017–2018

6. mars 2018 (nynorsk)

I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (seks punkt) som skal løysast på fire timar. Svara skal grunngivast og førast på eigne ark. **Begynn på nytt ark for kvar av dei fire oppgåvene.**

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Maksimal poengsum er såleis 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir, skrivereiskapar og tospråklege ordbøker er tillatne.

Oppgåve 1

Når n er eit oddetal, skriv vi $n!! = n \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 1$. Kor mange forskjellige restklassar modulo 1000 får ein frå $n!!$ for $n = 1, 3, 5, \ldots$?

Oppgåve 2

Omsenteret i ein trekant ABC vert kalla O. Punkta A', B' og C' er spegelbilda av O i høvesvis BC, CA og AB. Vis at dei tre linjene AA', BB' og CC' møtest i eit felles punkt.

Oppgåve 3

a. Finn alle polynom P som er slik at $P(x) + 3P(x+2) = 3P(x+1) + P(x+3)$ for alle reelle tal x.

b. Finn alle polynom P som er slik at

$$P(x) + \binom{2018}{2} P(x+2) + \cdots + \binom{2018}{2016} P(x+2016) + P(x+2018)$$
$$= \binom{2018}{1} P(x+1) + \binom{2018}{3} P(x+3) + \cdots + \binom{2018}{2015} P(x+2015) + \binom{2018}{2017} P(x+2017)$$

for alle reelle tal x.

Binomialkoeffisientane er gitt ved $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Oppgåve 4

a. Ei følgje a_1, a_2, ..., a_k av heiltal vert kalla *gyldig* dersom det for $j = 1, 2, \ldots, k-1$ gjeld at

- dersom a_j er eit *partall*, er $a_{j+1} = a_j/2$, men
- dersom a_j er eit *oddetall*, er $|a_{j+1} - a_j| = 1$.

Finn minste k slik at det finst ei gyldig følgje med $a_1 = 2018$ og $a_k = 1$.

b. Finn minste K slik at det for kvar $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2018\}$ finst ei gyldig følgje med $a_1 = n$, $a_k = 1$ og $k \leq K$.