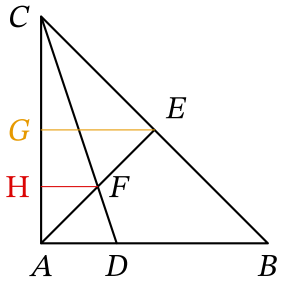
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Andre runde 2017–2018 – *Løsninger*

11. januar 2018

Oppgave 1. Trekk normaler EG og FH på siden AC som vist i figuren. Så er $CG = \frac{1}{2}AC$ (fordi trekantene ABC og GEC er likeformede), og på samme måte er $AH = \frac{1}{2}AG = \frac{1}{4}AC$. Trekanten AFH har vinkler 45°, 45° og 90°, så den er likebent, og $HF = AH = \frac{1}{4}AC$. Så blir $CH/HF = 3$, og fordi trekantene CHF og CAD er likeformede, blir $AD = \frac{1}{3}AC = 240$. **240**



Oppgave 2. Svaret er 1 (og ikke 211, som man kunne fristes til å tro). **1**

Oppgave 3. Om $100a + 10b + c$ er et tresifret geometrisk tall, må $a/b = b/c$, altså $ac = b^2$. Her er a, b og c heltall mellom 1 og 9. For å finne det største tallet, prøver vi med $a = 9$ og ser etter $c < 9$ slik at ac er et kvadrattall. Største mulighet er $c = 4$, som gir $b = 6$ og tallet 964. For det minste tallet prøver vi med $a = 1$, og ender med 124. Forskjellen er $964 - 124 = 840$. **840**

Anta at sifrene er ordnet. Hvis ikke, kan tallet gjøres større eller mindre ved å ordne sifrene.

Oppgave 4. Multipliser utvalgte ledd i ligningen med potenser av $x - y = 1$, slik at alle ledd får grad 2:

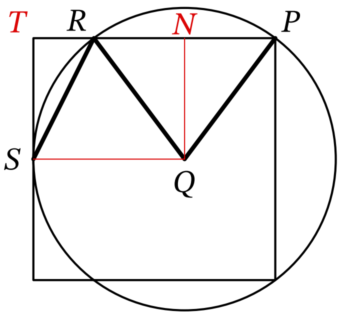
$$0 = (x-y)^2 + (x-y)(-2x+3y) - 4x^2 + 5xy + 6y^2 = -5x^2 + 8xy + 4y^2.$$

Da må $t = x/y$ oppfylle ligningen $-5t^2 + 8t + 4 = 0$. Denne ligningen har to løsninger med sum $8/5$, og $60 \cdot 8/5 = 96$.

Alternativ løsning: Sett inn $y = x - 1$ i den første ligningen. Resultatet er en annengradsligning med løsninger $x = 2$ og $x = 2/7$, som gir henholdsvis $x/y = x/(x-1) = 2$ og $x/y = x/(x-1) = -2/5$, med sum $8/5$. **96**

Oppgave 5. Hvis en av sidekantene i rektangelet er $2k$ ruter lang, vil hver rad eller kolonne i rektangelet ha k ruter av hver farge, så i alt blir det like mange svarte som hvite ruter. Men hvis hver sidekant er et odde antall ruter lang, inneholder rektangelet et odde antall ruter i alt, så det kan ikke være like mange hvite som svarte ruter. Det er 8 måter å velge én kolonne på i sjakkbrettet, 6 måter å velge tre nabokolonner, 4 måter å velge fem nabokolonner, og 2 måter å velge sju nabokolonner på. I alt $8+6+4+2 = 20$ mulige valg av et odde antall nabokolonner. Tilsvarende er det 20 mulige valg av et odde antall naborader, og derfor i alt $20 \cdot 20 = 400$ rektangler med sidekanter av odde lengde. . . . **400**

Oppgave 6. Bytt først ut oddetallssifrene med 1, og partallssifrene med 0. Vi finner disse seks mulighetene: 0011011, 0110011, 0110110, 1100011, 1100110, 1101100. For hver av disse plasserer vi inn oddetallssifrene i stedet for enerne på en av $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ måter, og partallssifrene i stedet for nullene på en av $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ måter. Det gir i alt $6 \cdot 24 \cdot 6 = 864$ muligheter. **864**



Oppgave 7. Trekk en normal fra Q til N på PR. Fordi sirkelen tangerer kvadratsiden gjennom S, er linjen SQ ortogonal på denne siden, så firkanten $SQNT$ er et rektangel. Spesielt er $TN = SQ = r$ (sirkelradien), så $PN = 32 - r$. Tangeringspunktet S ligger midt på sin side av kvadratet, fordi de to motstående hjørnene begge ligger på sirkelen. Pytagoras på trekanten PNQ gir da $(32-r)^2 + 16^2 = r^2$, med løsning $r = 20$. Fordi trekanten PQR er likesidet, blir N midtpunktet på PR. Dermed blir $PR = 2\,PN = 2\cdot(32-r) = 24$, så $TR = 32 - 24 = 8$. Pytagoras på trekanten RTS gir $RS^2 = 8^2 + 16^2 = 320$. Dermed er $PQ + QR + RS = 20 + 20 + \sqrt{320}$, som blir 58 etter avrunding til nærmeste heltall. Det er fordi $18^2 = 324$, slik at

$$0 < 18 - \sqrt{320} = \frac{(18-\sqrt{320})(18+\sqrt{320})}{18+\sqrt{320}} = \frac{4}{18+\sqrt{320}} < \frac{1}{2},$$

så $\sqrt{320}$ avrundet til nærmeste heltall er lik 18. . . . . **58**

Oppgave 8. Vi har $p(x) = (x-13)^3 + 179$, og ser at $(1-13)^3 + (25-13)^3 = 0$ og $(7-13)^3 + (19-13)^3 = 0$, så $p(1) + p(7) + p(19) + p(25) = 4\cdot 179 = 716$. **716**

Oppgave 9. Det minste tallet med fem forskjellige primfaktorer er $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11 > 1000$, så vi trenger bare vurdere tall med høyst fire forskjellige primfaktorer. Tallet $n = 2^a\cdot3^b\cdot5^c\cdot7^d$ har i alt $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)$ divisorer. Ved å sortere eksponentene a, b, c, d i avtagende rekkefølge, gjør vi n mindre, mens antall divisorer er uendret. Derfor er det nok å se på tilfellet $a \ge b \ge c \ge d$. Med fire forskjellige primfaktorer finner vi $2^3\cdot3\cdot5\cdot7 = 840$ med $4\cdot2\cdot2\cdot2 = 32$ divisorer. ($2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7 > 1000$, så vi har ikke flere kandidater å ta av.) Med tre forskjellige primfaktorer har vi kandidatene $2^6\cdot3\cdot5 = 960$ ($7\cdot2\cdot2$ divisorer), $2^4\cdot3^2\cdot5 = 720$ ($5\cdot3\cdot2 = 30$ divisorer) og $2^2\cdot3^2\cdot5^2 = 900$ ($3\cdot3\cdot3 = 27$ divisorer). Og med bare to primfaktorer er det beste vi kan få til $2^5\cdot3^3 = 864$, med $6\cdot4 = 24$ divisorer. **840**

Oppgave 10. Kall en binærstreng *god* dersom den har høyst to nuller på rad. Skriv S_n for antall gode binærstrenger av lengde n; så er $S_1 = 2$, $S_2 = 4$, og $S_3 = 7$. En god binærstreng av lengde $n \ge 3$ må ende på 1, 10 eller 100, og foran denne endelsen er en god binærstreng av lengde henholdsvis $n-1$, $n-2$ og $n-3$. Dermed er $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3}$, og så blir følgen $S_1, S_2, \ldots, S_{11}$ slik: 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, 927. . . . . **927**