

Niels Henrik Abels
matematikkonkurranse: Finale 2018–2019

5. mars 2019 (nynorsk)



I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (seks punkt) som skal løysast på fire timar. Svара skal grunngivast og førast på eigne ark. **Begynn på nytt ark for kvar av dei fire oppgåvene.**

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Maksimal poengsum er såleis 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepaper, skrivereiskapar og tospråklege ordbøker er tillatne.

Oppgåve 1

Du har eit rutenett med $n \times n$ tomme ruter. Du set eit kryss i alle rutene, ei rute om gongen. Når du set kryss i ei tom rute, får du $i + j$ poeng dersom det frå før er i kryss i same rad og j kryss i same kolonne. Kva for poengsummar er det mulig å oppnå?

Oppgåve 2

Finn alle par (m, n) av naturlege tal slik at $mn - 1 \mid n^3 - 1$.

Oppgåve 3

a. Tre sirklar tangerer kvarandre parvis utvendig. Sentra i sirklane er hjørne i ein trekant med omkrins lik 1. Kva er den minste mulige verdien for summen av areala av sirklane?

b. Finn alle reelle funksjonar f definert på alle reelle tal forskjellig frå null, slik at $f(2019) = 1$ og

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{2019}{x}\right)f\left(\frac{2019}{y}\right) = 2f(xy)$$

for alle $x, y \neq 0$.

Oppgåve 4

Diagonalane i ein konveks firkant $ABCD$ skjer kvarandre i E . Trekantane ABE , BCE , CDE og DAE har tyngdepunkt K , L , M og N , og ortosentre Q , R , S og T . Vis at firkantane $QRST$ og $LMNK$ er likeforma.