Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Andre runde 2018–2019 – *Løsninger*

10. januar 2019

Oppgave 1. Skriv a_n for antall måter å hoppe opp n trinn på. Så er $a_1 = 1$ og $a_2 = 2$: Med to trinn kan Kalle ta begge trinnene i ett, eller ett om gangen. Når $n > 2$ er $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$: For Kalle kan hoppe ett trinn først, og har da a_{n-1} muligheter for resten av trappen, eller han kan hoppe to trinn, med a_{n-2} muligheter videre. De første 12 tallene i følgen a_1, a_2, … blir dermed 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, **233**. (Disse tallene er *Fibonaccitall*: Men følgen av Fibonaccitall starter med 1, 1, 2, 3, 5, ….)

Alternativ løsning: Svaret kan skrives som en sum av binomialkoeffisienter:

$$\binom{12}{0} + \binom{11}{1} + \binom{10}{2} + \binom{9}{3} + \binom{8}{4} + \binom{7}{5} + \binom{6}{6} = 1 + 11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1.$$

Forklaring: Leddene i summen er antall muligheter med 0, 1, 2, …, 6 totrinnshopp. Om Kalle for eksempel gjør 3 totrinnshopp, blir det 9 hopp til sammen, og de tre totrinnshoppene kan velges på en av $\binom{9}{3}$ måter, avhengig av hvilke tre av de ni hoppene som er to trinn opp. **233**

Oppgave 2. Trekk en linje fra et hjørne i tikanten (for eksempel A) til hvert av de andre hjørnene med unntak av nabohjørnene (B og J). Disse sju linjene deler tikanten opp i åtte trekanter. Vinkelsummen i hver av trekantene er 180°, og den totale vinkelsummen i tikanten blir summen av vinkelsummene til de åtte trekantene, altså $8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$. Hver av de fem vinklene F, G, H, I og J er høyst 179°, så $F + G + H + I + J \le 5 \cdot 179^\circ = 895^\circ$, og $A + B + C + D + E = 1440^\circ - (F + G + H + I + J) \ge 1440^\circ - 895^\circ = \mathbf{545}^\circ$. **545**

Oppgave 3. Den likefremme løsningen er å skrive $P(x) = ax^2 + bx + c$, som gir de tre ligningene $a + b + c = 1$, $4a + 2b + c = 8$ og $9a + 3b + c = 27$. Disse løses med resultat $a = 6$, $b = -11$ og $c = 6$, og så er det bare å sette inn og få $P(-9) = 6 \cdot (-9)^2 - 11 \cdot (-9) + 1 = \mathbf{591}$.

Man kan spare litt arbeid ved i stedet å sette $P(x) = a(x - 2)^2 + b(x - 2) + c$, slik at de tre ligningene får formen $a - b + c = 1$, $c = 8$ og $a + b + c = 27$. Det gir $a = 6$ og $b = 13$, slik at $P(x) = 6(x - 2)^2 + 13(x - 2) + 8$, og på ny er det bare å sette inn.

Alternativ løsning: Tredjegradspolynomet $x^3 - P(x)$ har de tre nullpunktene 1, 2 og 3. Det har også ledende koeffisient 1, så det kan faktoriseres som $x^3 - P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Med andre ord er $P(x) = x^3 - (x-1)(x-2)(x-3)$, og derfor $P(-9) = -9^3 - (-10) \cdot (-11) \cdot (-12) = -729 + 1320 = \mathbf{591}$. **591**

Oppgave 4. Tverrsummen av tallet må være et multiplum av 9. Tverrsummen av det opprinnelige tallet er $10 \cdot (9+8+7+6+5+4+3+2+1) = 450$, som er et multiplum av 9, og derfor må også summen av de to sifrene Nils visker ut, være et multiplum av 9. Eneste muligheter er 18 (han visker ut to niere) og 9 (han visker ut to siffer med sum lik 9). Den første muligheten kan han få til på $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 45$ måter. For to gitte siffer med sum 9, er de to sifrene forskjellige, så hvert av dem kan velges fritt på en av ti måter, i alt 100 muligheter. De to sifrene kan selv velges på fire måter ($8 + 1$, $7 + 2$, $6 + 3$ og $5 + 4$), så her har vi i alt 400 muligheter, i tillegg til de 45 vi fant først. **445**

Oppgave 5. Fordi $T_{n+4} = T_n + 4n + 10$, gjelder at $T_n \mid T_{n+4}$ hvis og bare hvis $T_n \mid 4n + 10$. En tabell oppsummerer situasjonen for små n:

n	**1**	**2**	3	4	**5**	6	7	8	9
T_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45
$4n + 10$	14	18	22	26	30	34	38	42	46
$T_n \mid 4n + 10$	**ja**	**ja**	nei	nei	**ja**	nei	nei	nei	nei

Når $n \geq 10$, er $T_n > 4n + 10$, så det er ikke nødvendig å undersøke videre. (Dette vises lettest ved å notere at $T_{n+1} = T_n + n + 1$, så T_n vokser raskere med n enn $4n + 10$ så lenge $n + 1 > 4$.) Svaret blir $1 + 2 + 5 = 8$. **8**

Oppgave 6. Benytt konjugatsetningen $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, og legg merke til at når a og b er heltall, så har $a - b$ og $a + b$ samme paritet: De er begge oddetall, eller begge er partall. Derfor er $a^2 - b^2$ enten et oddetall eller delelig på 4. (En variant av dette resonnementet: Skriv $a = b + d$, så blir $a^2 - b^2 = d^2 + 2bd$. Det er lett å se at dette blir et oddetall om d er odde, og delelig på 4 om d er et partall.)

Hvis n er et oddetall, så er $n = 2k + 1 = (k + 1)^2 - k^2$ der k er et heltall, så n har den ønskede formen. Og dersom n er delelig på 4, gjelder tilsvarende $n = 4k = (k + 1)^2 - (k - 1)^2$, nok en gang på den ønskede formen. Det finnes 500 oddetall mellom 1 og 999 ($n = 2k - 1$ for $k = 1, 2, \ldots, 500$) og 249 tall delelig på 4 ($n = 4k$ for $k = 1, 2, \ldots, 249$). I alt $500 + 249 = \mathbf{749}$. **749**

Oppgave 7. Vi multipliserer ligningen $a + b + c = 2019$ med 3 og trekker fra ligningen $2a + 3b - 5c = 0$, med resultat $a + 8c = 3 \cdot 2019 = 6057$. For at $a > 0$ må vi ha $8c < 6057$, som er ekvivalent med $c \le 757$ siden c er et heltall. Vi prøver oss med $c = \mathbf{757}$, som gir $a = 6057 - 8 \cdot 757 = 1$, og dermed $3b = 5c - 2a = 5 \cdot 757 - 2 = 3783$, som er delelig med 3, slik at b blir et heltall (som vi kunne funnet ut raskere med litt enkel regning modulo 3.) **757**

Oppgave 8. Med $x = 10^{320} - \sqrt{10^{640} - 1}$ blir $1/x = 10^{320} + \sqrt{10^{640} - 1}$. Det gir $10^{320} < 1/x < 2 \cdot 10^{320}$, og derfor $5 \cdot 10^{-321} < x < 10^{-320}$. Det følger at x har **320** sammenhengende nuller etter desimaltegnet. **320**

Oppgave 9. Vi tar først et eksempel for å illustrere metoden vi vil bruke: *Hvor mange naturlige tall går opp i 600?* Start med å faktorisere 600 i primtall: $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$. Om 600 er delelig på et naturlig tall x, så kan ikke x inneholde andre primfaktorer enn 2, 3 og 5, og ingen av dem med høyere potens enn de tilsvarende potensene i faktoriseringen av 600. Eller kortere fortalt: x må ha formen $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$, med $i \le 3$, $j \le 1$ og $k \le 2$ – og omvendt vil 600 være delelig på alle tall på denne formen. Det er 4 mulige verdier for i, 2 mulige verdier for j, og 3 mulige verdier for k. Tilsammen gir det $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ muligheter, så 600 er delelig på eksakt 24 naturlige tall.

Nøyaktig samme resonnement gir som generelt resultat: Om et tall N har primtallsfaktorisering $N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_m^{n_m}$ der $p_1, p_2, \dots, p_m$ er forskjellige primtall, så er N delelig på nøyaktig $(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_m + 1)$ naturlige tall.

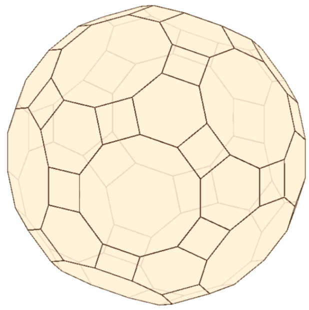
Vi leter altså etter naturlige tall $N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_m^{n_m}$ med $(n_1 + 1) \cdot (n_2 + 1) \cdot \dots \cdot (n_m + 1) = 20$. Det betyr at vi må betrakte alle måter å faktorisere 20 på, i et produkt av faktorer som er større enn 1 (siden hver n_k er positiv). Men $20 = 2^2 \cdot 5$, så dette kan gjøres på fire måter: 20 (et «produkt» med én faktor), $10 \cdot 2$, $5 \cdot 4$ og $5 \cdot 2 \cdot 2$. Det betyr at vi leter etter tall med den primtallsfaktorisering på en av de fire formene p_1^{19}, $p_1^9 \cdot p_2$, $p_1^4 \cdot p_2^3$ eller $p_1^4 \cdot p_2 \cdot p_3$.

Fordi $2^{10} = 1024 > 1000$, er de to første av disse umulig. Og fordi $5^4 \cdot 2^2 > 1000$, er det bare nødvendig å undersøke $p_1 = 2$ og $p_1 = 3$ i de to siste tilfellene.

Prøv først med $p_1 = 2$: Det gir $p_1^4 = 16$, og $\lfloor 1000/16 \rfloor = 62$ ($\lfloor x \rfloor$ er x avrundet ned til nærmeste heltall). Forsøk å få p_2^3 eller $p_2 p_3$ så tett oppunder 62 som mulig: Det beste er $3 \cdot 19 = 57$, som gir tallet $16 \cdot 57 = \mathbf{912}$.

Prøv deretter med $p_1 = 3$: Det gir $p_1^3 = 81$, og $\lfloor 1000/81 \rfloor = 12$. Forsøk så å få p_2^3 eller $p_2 p_3$ så tett oppunder 12 som mulig: Det beste er $2 \cdot 5 = 10$, som gir tallet $81 \cdot 10 = 810$. Men løsningen for $p_1 = 2$ ble større. **912**

Oppgave 10. Hvert hjørne i polyederet er også et hjørne i hver av sideflatene som møtes i det hjørnet. Summen av vinklene i disse hjørnene må være mindre enn 360°. Fordi alle sideflatene har hjørner med vinkel 90° eller større, kan ikke fire eller flere sideflater møtes i et hjørne. Men uansett må minst tre sideflater møtes i hvert hjørne, så *eksakt* tre sideflater møtes i hvert hjørne. Sideflatene har til sammen $30 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 12 \cdot 10 = 360$ hjørner, så polyederet har $360/3 = \mathbf{120}$ hjørner.



Ved å forfølge argumentet for at kun tre sideflater møtes i hvert hjørne, kommer man til at en kvadratisk side, en sekskantet og en tikantet side møtes i hvert hjørne. Vi vet ikke om det resulterende polyederet har et norsk navn, men på engelsk er det blant annet kjent under navnet *great* (eller *truncated*) *rhombicosidodecahedron*.

Den som kjenner til *Eulers formel* $V - E + F = 2$ for konvekse polyedere, der V er antall hjørner (engelsk **v**ertices), E er antall kanter (**e**dges) og F er antall sider (**f**aces), kommer raskere frem til svaret: Her er $F = 30 + 20 + 12 = 62$ og $E = 180$, og dermed $V = 120$.

. . . . **120**