Niels Henrik Abels matematikkonkurranse: Finale 2019–2020

3. mars 2020 (bokmål)

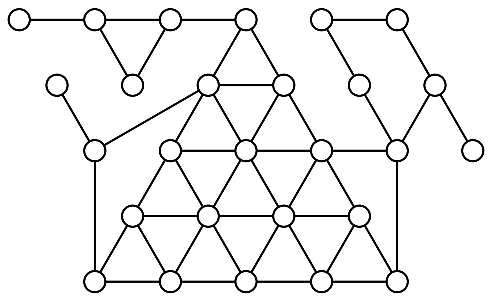
Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (sju punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.**

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

Oppgave 1

a. På hvor mange måter kan man fargelegge sirklene med tre farger, slik at to sirkler som er forbundet med et linjestykke aldri har samme farge?



b. Et rundt bord har plass til n gjester ($n \geq 2$). Det finnes servietter i tre forskjellige farger. På hvor mange måter kan man plassere servietter, én på hver plass, slik at ingen naboer får servietter med samme farge?

Oppgave 2

a. Finn alle naturlige tall k som er slik at det finnes naturlige tall a_1, a_2, ..., a_{k+1} med

$$a_1! + a_2! + \cdots + a_{k+1}! = k!.$$

Merk at vi ikke regner 0 som et naturlig tall.

b. Anta at a og b er naturlige tall med $a \geq b$ slik at $\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}$ er et naturlig tall. Vis at a og b har samme paritet.

Oppgave 3

Vis at ligningen

$$x^2 \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)^2 \cdot \cdots \cdot (x-1008)^2 \cdot (x-1009)^2 = c$$

har 2020 reelle løsninger dersom $0 < c < \dfrac{(1009 \cdot 1007 \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 1)^4}{2^{2020}}$.

Oppgave 4

a. Midtpunktet på siden AB i trekanten ABC kalles C' . Et punkt på siden BC kalles D, og E er skjæringspunktet mellom AD og CC'. Anta at $AE/ED = 2$. Vis at D er midtpunktet på BC.

b. Trekanten ABC har en rett vinkel i A. Sentrum i omsirkelen kalles O, og fotpunktet til normalen fra O på AC kalles D. Punktet E ligger på AO med $AE = AD$. Vinkelhalveringslinjen til $\angle CAO$ møter CE i Q. Linjene BE og OQ skjærer hverandre i F. Vis at linjene CF og OE er parallelle.