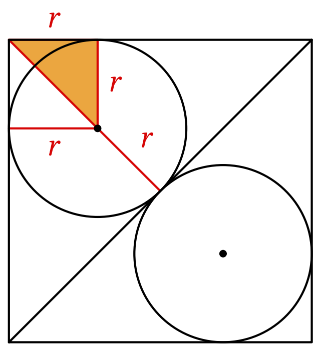
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Første runde 2019–2020 – *Løsninger*

7. november 2019

Oppgave 1. Det er $7 \cdot 6 \cdot 5$ måter å velge de tre på når rekkefølgen tas i betrakting. Dette må vi dele på antall måter å ordne de tre på: $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Da står vi tilbake med $7 \cdot 5 = 35$ muligheter. Fra disse må vi eliminere de utvalgene der både Arne og Berit er med: Det er fem muligheter, siden vi nå bare velger én blant de øvrige fem. Det er nå bare $35 - 5 = 30$ muligheter igjen.

Alternativ for den som kjenner til binomialkoeffisienter: Det er $\binom{7}{3} = 35$ mulige måter å velge tre av sju på. Her også må vi huske å trekke fra 5, med resultat 30. . . . . **C**

Oppgave 2. Vi ser etter de to siste sifrene i $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$. Siden $2 \cdot 5 = 10$ er med, er siste siffer null, og nest siste siffer blir lik siste siffer i produktet av resten av faktorene, altså $3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$. Vi kan kaste bort alle siffer unntatt det siste i hver faktor og dessuten i alle resultater i mellomregningen, så vi betrakter i stedet $3 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 9 = 3 \cdot (3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (9 \cdot 9)$. Produktene i hver parentes har siste siffer 1, så siste siffer i dette produktet blir 3, og de to siste sifrene i det opprinnelige produktet blir så 30. . . . . **B**



Oppgave 3. Hypotenusen i den fargelagte trekanten har lengde $\sqrt{2}r$. Linjestykket fra hjørnet til sentrum i kvadratet har derfor lengde $(\sqrt{2}+1)r$. Men den har også lengde $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, slik at avstanden mellom sirkelsentrene blir

$$2r = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 2 - \sqrt{2}.$$

. . . . **C**

Oppgave 4. Nils gjør unna den første halvdelen på en time, og den andre halvdelen på en halvtime. Til sammen har han da brukt en og en halv time på turen, med gjennomsnittshastighet $90\,\mathrm{km}/\frac{3}{2}\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{km/h}$. . . . . **A**

Oppgave 5. Mynt nummer k (med $k = 1, 2, \ldots, 7$) har tallene k og $k+7$ på de to sidene, så summen av de synlige sidene blir $1 + 2 + \cdots + 7 + 7m$, der m er antall mynter med det største tallet opp. Mulighetene for m er $0, 1, \ldots, 7$, altså åtte muligheter i alt. . . . . **A**

Oppgave 6. Vi kan gjøre det med fem tall: $29 \cdot 2 \cdot 3 = 174$, $23 \cdot 7 = 161$, $19 \cdot 5 = 195$, $17 \cdot 11 = 187$ og 13. Vi kan ikke gjøre det med færre tall, for produktet av hvilke som helst to av de fem primtallene 13, 17, 19, 23 og 29 er større enn 200 (det er nok å sjekke de to minste: $13 \cdot 17 = 221$). . . . . **B**

Oppgave 7. Om den minste sirkelen har radius r, så er $\pi r^2 + \pi(2r)^2 = 25$, altså $5\pi r^2 = 25$, slik at $r = \sqrt{5/\pi}$. . . . . **A**

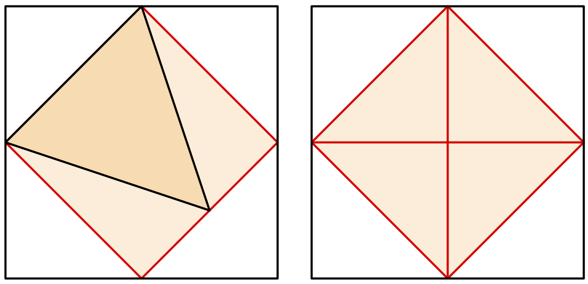
Oppgave 8. Betingelsen $ab^2 \leq 100$ krever at $b^2 \leq 100$, altså $b \leq 10$, og $a \leq 100/b^2$. Skriv $\lfloor x \rfloor$ for største heltall mindre enn eller like x. Antall muligheter i alt blir da

$$\left\lfloor \frac{100}{1^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{100}{10^2} \right\rfloor = 100 + 25 + 11 + 6 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 153.$$

. . . . **D**

Oppgave 9. Tallene a, ab og $\sqrt{a}/\sqrt{a+b}$ er alle mindre enn 1, men på den andre siden så er $2a/(a+b) > 1$, så det tallet er størst. **C**

Oppgave 10. Arealet til trekanten er halvparten av arealet til det skyggelagte kvadratet i figuren til venstre. Figuren til høyre inneholder åtte kongruente trekanter, og opptelling viser at arealet til det skyggelagte kvadratet er halvparten av arealet til det ytterste kvadratet. Arealet av trekanten blir $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. . . . . **A**



Oppgave 11. Tverrsummen av 17643 er 21, slik at 17643 er delelig med 3, men ikke med 9. Derfor er 17643 ikke et kvadrattall. (De øvrige tallene er virkelig kvadrattall: $12321 = 111^2$, $15129 = 123^2$, $18225 = 135^2$, $21904 = 148^2$.)

Alternativt kan vi benytte at ingen kvadrattall ender med tallsifferet 3, siden ingen av $0^2, 1^2, 2^2, \ldots, 9^2$ gjør det, og $10a + b = 100a^2 + 20ab + b^2$.

Alternativt (for de mer kunnskapsrike – en variant av forrige alternativ) benytter vi at 3 ikke er en kvadratisk rest modulo 5.

Alternativ: Fordi $(2n)^2 = 4n^2$ og $(2n+1)^2 = 4(n^2+n)+1$, er alle kvadrattall enten delelig med 4, eller resten etter divisjon med 4 er 1. Men resten etter divisjonen 17463/4 er 3. . . . . **C**

Oppgave 12. For at Bente skal få gaven med smykket, må hun og Anne bli trukket ut. Det er $6 \cdot 5 = 30$ måter å velge ut to av seks på, når vi tar hensyn til rekkefølgen. I to av disse mulighetene er det Anne og Bente som blir trukket ut. Sannsynligheten for det er da $\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$.

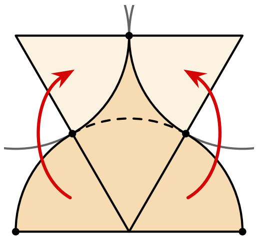
Alternativ løsning: Antall mulige utfall av loddtrekningen er gitt ved binomialkoeffisienten $\binom{6}{2} = 15$, så sannsynligheten er $\frac{1}{15}$. . . . . **E**

Oppgave 13.

$$\underbrace{\frac{1}{abcd} + \frac{1}{bcde} + \frac{1}{cdea} + \frac{1}{deab}}_{\cdots = 8} + \frac{1}{eabc} = \frac{a+b+c+d+e}{abcde} = \frac{5 \cdot 2}{1} = 10.$$

Dermed er $1/eabc = 2$, altså $eabc = 1/2$. . . . . **D**

Oppgave 14. Ved å flytte to sirkelsektorer, fyller vi akkurat en likesidet trekant der sidene har lengde 2. Da har trekanten høyde $\sqrt{3}$, så arealet er også $\sqrt{3}$. . . . . **E**



Oppgave 15. De positive divisorene har formen $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e$ der eksponentene er heltall med $0 \le a \le 5$, $0 \le b \le 4$, $0 \le c \le 3$, $0 \le d \le 2$, $0 \le e \le 1$. Et slikt tall er kvadrattall hvis og bare hvis alle eksponentene er partall. Det gir tre muligheter hver for a og b (0, 1 og 2), to hver for c og d, og én for e. I alt $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ muligheter. . . . . **D**

Oppgave 16. Om vi multipliserer de to ligningene med hverandre, får vi $(x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = 26 \cdot 106$. Når vi forenkler dette, står vi tilbake med $x^4 + 4y^4 = 26 \cdot 106 = 2756$. . . . . **C**

Oppgave 17. La oss si at trekanten ABC har sidekant s, høyde h og areal $a = \frac{1}{2}sh$. Høyden er en katet i en rettvinklet trekant der hypotenusen er s og den andre kateten er $s/2$, så $h^2 = s^2 - (s/2)^2 = \frac{3}{4}s^2$, og derfor $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}s$.

Trekanten DEC er også likesidet, med areal $\frac{3}{4}a$, og derfor sidekant $\frac{1}{2}\sqrt{3}s$. En av disse sidekantene er DE, og lengden er lik h (se slutten av første avsnitt).
. . . . **A**

Oppgave 18. Den oppgitte formelen $f(2) = 2$ gir $2a + b = -2$. Påstand A blir ekvivalent med $2 > a+b+1$, som ikke følger fra forutsetningen, fordi $a+b$ kan ha hvilken som helst verdi. Påstand E er $a+b+1 > 0$, som heller ikke følger, av samme grunn. Påstand B kan skrives $2a+2b+2 = 2+b$, ekvivalent $2a+b = 0$, som strider mot forutsetningen. Påstand C sier $b = 0$, som heller ikke følger. Det gjenstår å sjekke påstand D. Fordi $f(x) = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, gjelder at $f(x_1) = f(x_2)$ hvis og bare hvis $x_1 = x_2$ eller $x_1 + x_2 = -a$ (parabelen er symmetrisk om den vertikale linjen gjennom bunnpunktet, dvs $x = -a/2$). Så påstand D sier at $f(1) = 1$ eller $f(1) + 1 = -a$. Den første av disse gir $a + b = 0$, som ikke følger. Den andre gir $a + b + 2 = -a$, det vil si $2a + b = -2$, som var utgangspunktet. . . . . D

Oppgave 19. Et moteksempel til påstand A er $r = s = \sqrt{2}$. Et moteksempel til påstand B og D er $r = \sqrt{2}$, $s = -\sqrt{2}$. Et moteksempel til påstand C er $r = s = \sqrt[4]{2}$. . . . . E

Oppgave 20. La g være Gunnars tall, og k være Karl Eriks tall.

G: *Jeg er ikke sikker på hvem som har størst tall, jeg. Vet du?* Av dette kan vi slutte at $2 \leq g \leq 8$. For om $g = 1$, må g være minst, og om $g > 8$, må g være størst.

KE: *Ikke før du sa noe, men nå vet jeg!* Fra første del lærer vi at også $2 \leq k \leq 8$. Men da Karl Erik fant ut at $2 \leq g \leq 8$, visste han hvilket tall som var størst. Altså er $k \neq 4$, for da ville mulighetene for at $g = 2$ eller $g = 8$ begge være åpne. Om $k \in \{2, 3\}$ ville Karl Erik vite at k er minst, og om $k \in \{5, 6, 7, 8\}$ ville han vite at k er størst, så alle disse er fortsatt muligheter.

G: *Jeg er fortsatt usikker på hvem som har størst tall, jeg.* Nå vet vi at $g = 4$, fra resonnementet over. Og da må $k = 2$ eller $k = 8$.

KE: *Det er nå jeg som har det største tallet, da.* Det avgjør saken: $k = 8$, og $g + k = 12$. C