Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Andre runde 2019–2020 – *Løsninger*

16. januar 2020

Oppgave 1. Summen av *alle* tallene fra 1 til 47 er $1 + 2 + 3 + \cdots + 47 = (47 \cdot 48)/2 = 47 \cdot 24$. Summen av de som er delelig med 6 er $6 + 12 + \cdots + 42 = 6 \cdot (1 + 2 + \cdots + 7) = 6 \cdot (7 \cdot 8)/2 = 7 \cdot 24$. Differansen er $(47 - 7) \cdot 24 = 960$. **960**

Oppgave 2. Start med de to første leddene: $2020! - 2019! \cdot 2019 = 2019! \cdot 2020 - 2019! \cdot 2019 = 2019! \cdot (2020 - 2019) = 2019!$. Nå starter uttrykket med $2019! - 2018! \cdot 2018$, som vi behandler på samme måte, med resultat $2018!$. Slik fortsetter vi, inntil vi står igjen med $3! - 2! \cdot 2 = 6 - 4 = 2$. **2**

Oppgave 3. Vi illustrerer problemet med et mye mindre eksempel. De hvite småtrekantene i figuren kan telles opp ved å summere radvis, med resultat $1+2+3 = 6$. Om den store trekanten hadde sidekant n, ville den siste raden fått $n - 1$ hvite småtrekanter, og det totale antallet ville blitt $1 + 2 + \cdots + (n - 1) = (n - 1) \cdot n/2$. Med $n = 40$ blir det $1 + 2 + 3 + \cdots + 39 = 39 \cdot 40/2 = 780$ hvite småtrekanter. **780**

Oppgave 4. Linjen må gå gjennom sentrum i parallellogrammet, det vil si punktet $\left(\frac{5}{2}, \frac{83}{2}\right)$. Stigningstallet blir $\left(\frac{83}{2} - 34\right)/\left(\frac{5}{2} - 2\right) = 15$. Punktet $(2, 34)$ ligger på diagonalen gjennom $(0, 4)$ og $(5, 79)$, med ligning $y = 15x + 4$. **15**

Oppgave 5. I hver runde vil enten Sigrid eller Petra (eller begge) få poeng. For hvis Petra *ikke* får poeng, er det fordi begge terningene viser oddetall, men da er summen er partall, så Sigrid får poeng. De får *begge* poeng akkurat de gangene Odd *ikke* får poeng. Dermed er det alltid to som får poeng i hver runde, og summen av alles poengsummer er $2 \cdot 300 = 600$. Men da har Odd fått $600 - 147 - 226 = 227$ poeng. **227**

Oppgave 6. Oppgaven går ut på å finne summen av alle tall c der $a^2 + b^2 = c^2$ med heltallige, positive a, b og c, der minst ett av tallene er 12. To løsninger der a og b er byttet om, regnes bare én gang i summen.

Vi prøver først $c = 12$. Da må a og b ha samme paritet. Hvis begge er partall, $a = 2x$ og $b = 2y$, blir $x^2 + y^2 = 6^2$. Men vi ser raskt at $6^2 - x^2$ ikke er et kvadrattall for $x = 1, 2, 3, 4$ eller 5, så dette gir ingen løsning. På den annen side, hvis både a og b er oddetall, $a = 2x + 1$ og $b = 2y + 1$, blir $4(x^2 + y^2 + x + y) + 2 = 6^2$, som er en motsigelse fordi 4 går opp i høyresiden, men ikke i venstresiden. Dermed er $c = 12$ ikke en mulighet.

Det gjenstår å prøve med $b = 12$. Vi skriver om $a^2 + 12^2 = c^2$ på formen $144 = (c - a)(c + a)$. Faktorene $c - a$ og $c + a$ har samme paritet, og må derfor begge være partall. Hver faktorisering av 144 i to forskjellige partall m, n med $m < n$ (det vil si $m < 12$) gir en løsning der $c - a = m$ og $c + a = n$. I denne løsningen er $c = \frac{1}{2}(m+n)$.

Partallene som går opp i $144 = 2^4 \cdot 3^2$ og slik at kvotienten også er et partall, har formen $2^j \cdot 3^k$ der $j \in \{1, 2, 3\}$ og $k \in \{0, 1, 2\}$. Dette gir følgende kandidater for m: 2, 4, 8, 6 (resten er ≥ 12). For hver av disse regner vi ut $c = \frac{1}{2}(m+n)$ der $n = 144/m$, og får $c = 37, 20, 13, 15$. Summen av disse er 85. . . . . **85**

Oppgave 7. Skriv A for mengden av helttall i $\{10000, 10001, \ldots, 99999\}$ med desimalrepresentasjon på formen 777−−, der hver strek står for et vilkårlig tallsiffer. Skriv B for de på formen −777−, og C for de på formen −−777.

Skriv så $|A|$ for antall medlemmer i A, og så videre. Da er $|A| = 100$ og $|B| = |C| = 90$ (siden første siffer ikke får være null). Vi summerer, og får $|A| + |B| + |C| = 280$.

Men da har vi talt opp tallene i snittet $A \cap B$ to ganger. Disse er tallene på form 7777−, så $|A \cap B| = 10$. Dette antallet må trekkes fra summen vi fant. Vi må gjøre det samme med $B \cap C$ (tall på formen −7777, $|B \cap C| = 9$) og $A \cap C$ (bare tallet 77777, $|A \cap C| = 1$), så til sammen trekker vi fra 20.

Til slutt legger vi merke til at tallet 77777 er først tatt med tre ganger og så trukket fra tre ganger, så det er ikke talt med. Derfor må vi legge til 1 til sist, med endelig resultat 261.

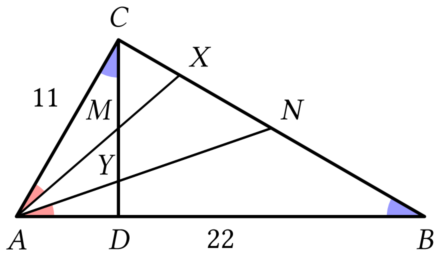
Formelen $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$ er kjent som *inklusjons–ekslusjons-prinsippet.* En tilsvarende formel gjelder for et vilkårlig (endelig) antall mengder. Metoden kan virke omstendelig, men den er enkel og rask å bruke når man først er godt kjent med den.

Alternativt kan vi dele opp i disjunkte mengder, for eksempel slik: Tall på formen $777xy$ der x og y er vilkårlige tallsiffer (100 mulige), tall på formen $x777y$ med $x \neq 0$, $x \neq 7$ og y vilkårlig (80 mulige), og på formen $xy777$ med $x \neq 0$ og $y \neq 7$ (81 mulige), til sammen 261 mulige. **261**

Oppgave 8. Erstatter vi x med $1 - x$ i den gitte ligningen, blir resultatet $2f(1-x) - f(x) = (1-x)^2 + 5(1-x) - 1 = x^2 - 7x + 5$. Om vi så legger til to ganger den opprinnelige ligningen og deler på 3 står vi tilbake med $f(x) = x^2 + x + 1$, slik at $f(20) = 421$. **421**

Oppgave 9. Ingen av de 673 oddetallene 675, 677, ...,2019 går opp i noe annet av disse tallene, fordi $3 \cdot 675 = 2025 > 2019$. På den annen side kan vi dele opp $\{1, 3, 5, \dots, 2019\}$ i 673 parvis disjunkte mengder $A_1, A_5, A_7, A_{11}, \dots, A_{2017}$ (en for hvert tall med rest 1 eller 5 etter divisjon med 6) der A_k består av alle tall $3^j \cdot k < 2020$ med $j \geq 0$. (Tallene k telles opp slik: en tredjedel av de $6 \cdot 336$ tallene 1, 2, 3 ..., 2016, og 2017 i tillegg, altså 673 i alt.) Om du velger to tall fra samme mengde A_k, vil det minste av dem gå opp i det største. Derfor er det ikke mulig å velge flere enn 673 tall uten at noen av dem går opp i et annet. **673**

Oppgave 10. Trekantene ACD og ABC er formlike, fordi de har en rett vinkel hver og en felles vinkel i A. Spesielt er $\angle ACD = \angle ABC$ (blå i figuren). Du kan også se dette direkte fordi vinkelbena står parvis vinkelrett på hverandre).



Siden vi nå vet at $|CD|/|AC| = |BC|/|AB|$, er også $|CM|/|AC| = |BN|/|AB|$, fordi M og N er midtpunkter på CD og BC. Men så er også trekantene ACM og ABN formlike, på grunn av like vinkler (blå) og likt lengdeforhold mellom sidene ved disse vinklene. Spesielt er $\angle MAC = \angle BAN$ (røde i figuren).

◇ Det følger av dette at trekantene ADY og ACX er formlike: De har en rett vinkel hver i tillegg til de røde vinklene. Størrelsesforholdet mellom dem er $|AD|/|AC| = \frac{1}{2}$, siden CAD er en 30°–60°–90°-trekant. Men dermed er også $|YD| = \frac{1}{2}|CX|$, og til slutt $(|XB| + 2|YD|)^2 = (|XB| + |CX|)^2 = |BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2 = 22^2 - 11^2 = 363$.

Alternativ løsning: Speilingen av trekanten ABC om halveringslinjen i $\angle BAC$ blir en trekant $AB'C'$. På grunn av de gitte vinklene er $|AC| = \frac{1}{2}|AB|$, så C' er midtpunktet på AB, og C er midtpunktet på AB'. Speilingen N' av midtpunktet N på BC er midtpunktet på $B'C'$. Siden trekantene $AB'C'$ og ACD er likeformede, vil linjestykket AN' skjære CD i midtpunktet M, og derfor også CB i X. De røde vinklene i figuren er like, på grunn av symmetrien: $\angle B'AN' = BAN$. Resten er som siste avsnitt (◇) i den første løsningen. **363**