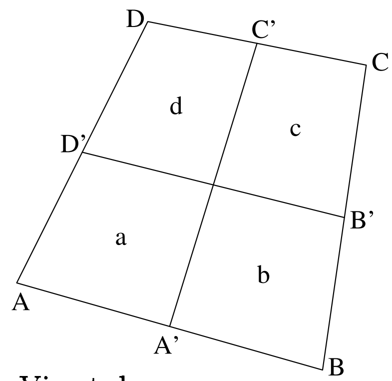
Abel-konkurransen 1993
FINALE

Oppgave 1



a) La $ABCD$ være en konveks firkant. (Dvs. at hjørnevinklene alle er mindre enn $180°$.) La A' være midtpunktet på AB, B' midtpunkt på BC, C' midtpunkt på CD, og D' midtpunkt på AD. Trekk linjene $A'C'$ og $B'D'$, og la a, b, c og d være arealene til de fire mindre firkantene, som vist på figuren. Vis at $a + c = b + d$.

b) Gitt en trekant med sider av lengde a, b og c. Vis at da er

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Oppgave 2

Vis at dersom $b < c < d$, gjelder ulikheten

$$(a + b + c + d)^2 > 8(ac + bd)$$

for alle a.

Oppgave 3

Fermat-tallene er definert ved $F_n = 2^{2^n} + 1$ for $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) Vis at $F_n = F_{n-1}F_{n-2} \cdots F_1F_0 + 2$ for $n = 1, 2, 3, \ldots$

b) Vis at to forskjellige Fermat-tall ikke kan ha noen større felles faktor enn 1.

Oppgave 4

Vi har en terning. Hvert av de 8 hjørnene gir vi verdien 1 eller -1. Hver av de seks sideflatene gis en verdi lik produktet av verdiene til sideflatens fire hjørner. La A være summen av verdiene til alle hjørnene (åtte stykker) og alle sideflatene (seks stykker). Da er A summen av 14 verdier. Hvilke verdier kan A få?