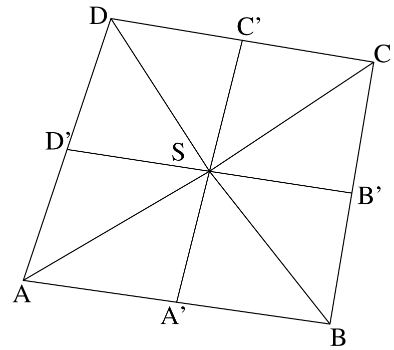
Abel-konkurransen 1993
FINALE — FASIT

Oppgave 1



a) La S være skjæringspunktet mellom $A'C'$ og $B'D'$. Trekantene $AA'S$ og $A'BS$ har samme areal, fordi høyden fra grunnlinjen AB til S er den samme for de to trekantene og $AA' = A'B$. Tilsvarende har $BB'S$ og $B'CS$ samme areal, osv. Ved å dele arealene a, b, c og d opp i slike trekanter, får vi at $a + c = b + d$.

b) Vi har at $a < b + c$, $b < a + c$ og $c < a + b$. Følgelig er $2(b + c) > a + b + c$, etc. Dette gir at

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &= \frac{2a}{2(b+c)} + \frac{2b}{2(a+c)} + \frac{2c}{(a+b)} \\ &< \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Oppgave 2

La $F = (a+b+c+d)^2 - 8(ac+bd)$. Når vi varierer a, antar F sin minste verdi når $a = 3c - b - d$. Ved å sette inn denne verdien for a, blir $F = 8(bc + cd - c^2 - bd) = 8(d - c)(c - b)$. Siden $b < c < d$ må da $F > 0$.

Oppgave 3

a) Bruker induksjon. For $n = 1$ holder påstanden: $F_1 = 5 = F_0 + 2$. Dersom $F_n = F_{n-1} \cdots F_1 F_0 + 2$, blir

$$F_{n+1} - 2 = 2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1) = F_n(F_n - 2) = F_n F_{n-1} \cdots F_1 F_0.$$

b) Anta at $a > 1$ deler både F_n og F_m, $n > m$. Da må $F_{n-1} \cdots F_m \cdots F_1 F_0$ også være et multiplum av a. Dette gir at a må dele $F_n - F_{n-1} \cdots F_0 = 2$, og følgelig må $a = 2$. Men, både F_n og F_m er odde tall, og er dermed ikke multipla av $a = 2$.

Oppgave 4

Anta først at antall hjørner med verdi -1 er odde. To motstående sideflater (uten felles hjørner) vil da alltid ha forskjellig verdi. Summen av verdiene til de seks sideflatene blir således lik null. Det eneste bidrag til A kommer fra hjørnene. Siden det er 1, 3, 5 eller 7 hjørner, blir A lik $6, 2, -2$ eller -6.

La oss nå anta at antall hjørner med verdi -1 er like. To motstående sideflater vil da ha samme verdi. Summen av verdiene for sideflatene blir da $6, 2, -2$ eller -6 avhengig av om ingen, 2, 4 eller 6 av sideflatene har negativ verdi. Delsummen for hjørnene blir tilsvarende $8, 4, 0, -4$ eller -8 avhengig av om ingen, 2, 4, 6 eller 8 av hjørnene har negativ verdi. Summen av disse to må være $14, 10, 6, 2, -2, -6, -10$ eller -14. Av disse vet vi at summene $6, 2, -2$ og -6 fremkommer for odde antall negative hjørner. De resterende må vi sjekke.

Ved å la alle hjørnene ha verdi 1, blir $A = 14$. For å få $A = 10$ må minst to hjørner være negative, men heller ikke flere enn to. Dersom to hjørner er negative vil minst to av sideflatene også bli negative, og dermed blir A mindre enn 10. Ved å la alle hjørnene få verdi -1 unntatt to diametralt motsatte hjørner (som da er uten felles sideflate), blir $A = -10$. For å få $A = -14$ måtte alle hjørner og sideflater være negative, men det er umulig. Dersom alle hjørnene er negative, blir alle sidene positive.

De mulige verdier for A er $14, 6, 2, -2, -6$ og -10.