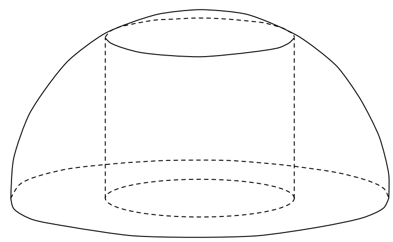
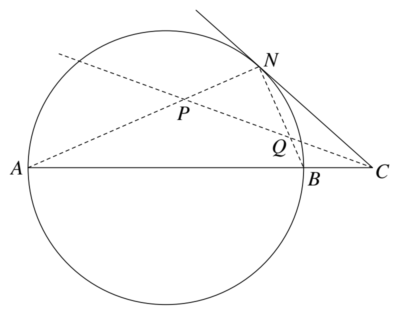
Abel-konkurransen 1994
FINALE

Oppgave 1



a) Vi har en halvkule med radius 3. Inni denne er en sylinder med radius $\sqrt{3}$ som står midt på bunnflaten og treffer overflaten av kulen. Det finnes en annen slik sylinder med en annen radius, men med samme volum som denne. Hvilken radius har den?



b) La AB være diameteren i en sirkel, og la C være et punkt på forlengelsen av AB. Trekk en linje gjennom C som tangerer sirkelen i punktet N. Halveringslinjen til vinkelen $\angle ACN$ skjærer linjene AN og BN i punktene P og Q. Vis at $PN = QN$.

Oppgave 2

a) Finn alle primtall p, q, r og naturlige tall $n \in \mathbf{N}$ slik at $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{n}$.

b) Finn alle heltall $x, y, z \in \mathbf{Z}$ slik at $x^3 + 5y^3 = 9z^3$.

Oppgave 3

a) La $x_1, x_2, \ldots, x_{1994} > 0$ være reelle tall. Vis at da er

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{x_1}{x_2}} \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{\frac{x_2}{x_3}} \cdots \left(\frac{x_{1993}}{x_{1994}}\right)^{\frac{x_{1993}}{x_{1994}}} \geq \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{x_2}{x_1}} \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{\frac{x_3}{x_2}} \cdots \left(\frac{x_{1993}}{x_{1994}}\right)^{\frac{x_{1994}}{x_{1993}}}.$$

b) Vis at det ikke finnes noen funksjon $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ (der argument og funksjonsverdi er hele tall) slik at $f(f(x)) = x + 1$ for alle x.

Oppgave 4

a) I en gruppe på 20 personer sender hver person på et tidspunkt, brev til 10 av de andre. Vis at det da finnes to personer som sender brev til hverandre.

b) Et endelig antall byer er forbundet med enveiskjørte veier. For ethvert par av byer finnes det minst én vei (eventuelt via andre byer) fra den ene til den andre, men ikke nødvendigvis i begge retninger. Vis at det finnes en by som kan nås fra alle de andre byene og at det finnes en by hvorfra alle andre byer kan nås.