Abel-konkurransen 1994

Fasit til første runde

Oppgave 1: Familien må ha minst to sønner for at hver av sønnene skal ha en bror, og tilsvarende må den ha to døtre. Familien har altså minst fire barn. **C**

Oppgave 2: Vi har at $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ og $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Dette gir at summen er lik $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$. **C**

Oppgave 3: Dersom vi kutter av taggen som stikker ut sitter vi igjen med et stykke med lengde $(a+2)+(a+1)+(a+2) = 3a+5$ og bredde $2a$ pluss taggen som er kvadratisk med sidelengde $a+1$. Arealet av hele figuren blir da $2a(3a+5)+(a+1)^2 = 7a^2+12a+1$. **D**

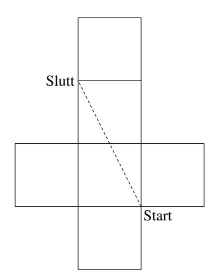
Oppgave 4: Siden $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, er $\angle C = 50°$. Siden trekanten CDE er likesidet er $\angle CDE = \angle CED$. Ved å bruke at $\angle C + \angle CDE + \angle CED = 180°$ finner man at $\angle CED = 65°$. **D**

Oppgave 5: Siden $x = -y$ får vi at $1/x = 1/(-y) = -1/y$. Derfor er $1/x - 1/y = -2/y$. **D**

Oppgave 6: Arealet av den store sirkelen er $(3/2)^2\pi = 9\pi/4$: $A = \pi r^2$. Arealene til de to mindre er $(1/2)^2\pi = \pi/4$ og $(2/2)^2\pi = \pi$. Arealet av det skraverte området er således $9\pi/4 - \pi/4 - \pi = \pi$, og utgjør dermed 4/9 av den store sirkelens areal. **E**

Oppgave 7: La A4-arket ha sidelengder x og y der $x > y$. Da har A5-arket sidelengder y og $x/2$. At arkene har samme form vil da si at forholdet mellom sidelengdene er de samme: $x/y = y/(x/2)$. Ved å løse denne ligningen med hensyn på x/y finner vi at $(x/y)^2 = 2$ hvilket vil si at $x/y = \sqrt{2}$. **A**

Oppgave 8: Siden $x^2 = x + 3$, er $x^3 = x \cdot x^2 = x(x+3) = x^2 + 3x = (x+3) + 3x = 4x + 3$. **C**



Oppgave 9: Dersom man bretter veggene ut som på figuren og bruker Pytagoras setning, finner man at den korteste veien er $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ meter lang. **B**

Oppgave 10: Dersom n mann jobber n timer om dagen i n dager er det gjordt n^3 timeverk. At det var behov for n^3 timeverk for å produsere n enheter vil si at det tar n^2 timeverk å produsere en enhet. Dersom m mann jobber m timer om dagen i m dager blir det utført m^3 timeverk. Antall enheter produsert blir da m^3/n^2. **B**

Oppgave 11: Ved å sette $z = 2$ får vi $2 = 1/(1 + 2/y)$; dette gir $y = -4$. Dette gir videre at $-4 = 1/(1 - 4/x)$ som gir $x = 16/5$. **D**

Oppgave 12: Først merker vi oss at $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$. For å sammenligne $\sqrt{2}$ og $\sqrt[3]{3}$ opphøyer vi begge tallene i sjette potens; det gir $2^3 = 8$ og $3^2 = 9$. Av dette ser vi at $\sqrt{2}$ er den minste av de to. For å sammenligne $\sqrt{2}$ med $\sqrt[5]{5}$ opphøyer vi begge tallene i tiende potens; dette gir $2^5 = 32$ og $5^2 = 25$. Vi ser da at $\sqrt[5]{5}$ er mindre enn $\sqrt{2}$. **D**

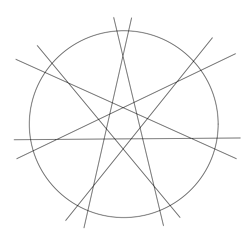
Oppgave 13: Man kan selvsagt multiplisere ut hele uttrykket, men det er unødvendig mye arbeide. Merk at $(u+v)^3 = u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$. Dersom vi lar $u = 3x^2$ og $v = 2/x$ ser vi at det leddet som ikke inneholder x er leddet $3uv^2 = 3 \cdot (3x^2) \cdot (2/x)^2 = 36$. **D**

Oppgave 14: Hvis vi velger en nevner m og krever at n/m ikke skal kunne forkortes, kan vi telle opp antall tillatte n for hver m. For $m = 1$ er alle tellere tillatt hvilket gir 10 muligheter; for $m = 2$ er kun oddetall tillatt hvilket gir 5 muligheter; for $m = 3$ må n ikke være delelig med 3 hvilket utelukker 3, 6 og 9, og 7 muligheter gjenstår; $m = 4$ gir 5 muligheter; $m = 5$ gir 8 muligheter; $m = 6$ utelukke alle n som er delelig med 2 eller 3, og da gjenstår 1, 5 og 7; for $m = 7$ er kun 7 utelukket; for $m = 8$ er 5 muligheter; for $m = 9$ er 7 muligheter; for $m = 10$ er kun 1, 3, 7 og 9 mulige. Dette gir 63 muligheter totalt. **D**

Oppgave 15: La s være strekningen. Tid er lik strekning delt på fart. Dette gir at total tid er $(s/6)/10 + (2s/3)/20 + (s/6)/30 = s/18$. Gjennomsnittsfarten er derfor 18km/t. **B**

Oppgave 16: Man starter med en bit. Den første linjen deler denne i to. Den neste linjen deler hver av de to delene i to. Den tredje linjen kan maksimalt treffe tre av bitene og kan derfor ikke øke antall biter med mere enn 3, den fjerde linjen kan øke antall biter med fire, osv. Dette gir oss at antall biter maksimalt kan bli $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 29$.

For å se at dette antallet biter faktisk er mulig, kan man trekke syv linjer i planet slik at ingen linjer er paralelle og slik at tre linjer aldri skjærer i ett punkt; trekk så sirkelen slik at den omslutter alle skjæringspunktene. Kriteriene ovenfor er da overholdt. **B**



Oppgave 17: Hvis vi legger til 1 på hver side, får vi $(a+1)(b+1) = 55$. Siden $55 = 5 \cdot 11$ der 5 og 11 er primtall, og både $a + 1$ og $b + 1$ er heltall større enn en, må $a + 1$ og $b + 1$

ta verdiene 5 og 11. Dette gir $a = 4, b = 10$ eller omvendt. Uansett er $a + b = 14$.
B

Oppgave 18: Vi får $x^2 = y^2 + z^2 + 2yz = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 4 + 2\sqrt{2} = 2(2+\sqrt{2}) = 2y^2$. Dette gir at $x = y\sqrt{2}$. **A**

Oppgave 19: Maksimalt antall linjer er åtte: fire og fire paralelle. Hvis det skulle finnes ni eller flere linjer, vil følgende oppstå. Ta en linje. Siden denne skjærer nøyaktig fire av linjene, må den være paralell med alle de andre. Det vil si at det finnes minst fem paralelle linjer. En linje som skjærer en av dem vil derfor skjære alle fem, og det er ikke tillatt. **B**

Oppgave 20: Vi starter med 1993 og får da ved gjentatt bruk av f, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 200, 20, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1. Vi ser da at $a_{19} = 1$.
A

FASIT:

1:	C		11:	D	
2:	C		12:	D	
3:	D		13:	D	
4:	D		14:	D	
5:	D		15:	B	
6:	E		16:	B	
7:	A		17:	B	
8:	C		18:	A	
9:	B		19:	B	
10:	B		20:	A	

BRUKSANVISNING:

Denne tabellen har samme format som svartabellen i oppgavesettet. Ved å klippe den ut og klippe ut de to spaltene kan du, ved å legge dette tablået over svaret, raskt finne ut hvor mange riktige og gale svar det er.

Dersom du har mange oppgaver å rette, burde den være hendig å bruke. Jeg håper ihvertfall det. Pass bare på i tilfelle noen har skrevet noe utenfor rutene.