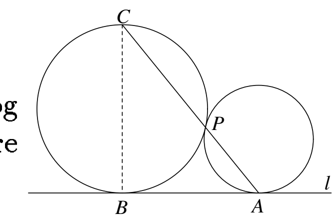
Abel-konkurransen 1994–95
FINALE

Oppgave 1

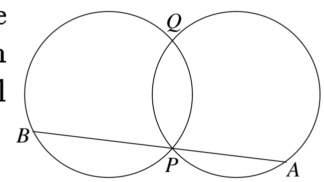
a) La $f(1)=1$, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=n^2\cdot f(n)$ for alle naturlige tall n. Hva er da $f(1995)$?

b) Vis at dersom $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$, så er $x+y=0$.

Oppgave 2



a) To sirkler tangerer en linje l i punktene A og B og hverandre i punktet P. Linjen AP skjærer den andre sirkelen i punktet C. Vis at BC står normalt på l.



b) To sirkler med samme radier skjærer i to forskjellige punkter: P og Q. Trekk en linje gjennom P som ikke tangerer noen av sirklene. I tillegg til P, skjærer linjen sirklene i punktene A og B. Vis at midtnormalen til AB går gjennom Q.

Oppgave 3

Vis at det finnes en ordning av de naturlige tall, dvs. en følge x_i med $i=1,2,3,4,\ldots$ slik at ethvert naturlig tall forekommer nøyaktig én gang i følgen og slik at følgen $\sum_{i=1}^{n} 1/x_i$ for $n=1,2,3,4,\ldots$ inneholder alle naturlige tall. Dvs. at for ethvert naturlig tall m finnes en n slik at $m=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}$.

Oppgave 4

La n være et naturlig tall og la $x_1,x_2,\ldots,x_n,y_1,y_2,\ldots,y_n>0$. Vis at da er

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_iy_i}\right)\geq 4n^2.$$

Dvs. at $\left((x_1+y_1)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2\right)\cdot\left(\frac{1}{x_1y_1}+\cdots+\frac{1}{x_ny_n}\right)\geq 4n^2$.