Abel-konkurransen 1994–95

Fasit til første runde

Oppgave 1: Hvis vi innenfor rottegnet ganger ut og setter på felles brøkstrek fåes $\sqrt{\frac{4^2+3^2}{4^2}} = \sqrt{\frac{5^2}{4^2}} = \frac{5}{4}$. **A**

Oppgave 2: Pytagoras setning gir at $BC = 5$. Arealet av trekanten er da lik $AB \cdot AC/2 = h \cdot BC/2$. Dette gir at $h = 12/5$. **B**

Oppgave 3: Siden $4 = 2 \cdot 2$ er $4^8 \cdot 5^{17} = 2^{16} \cdot 5^{17} = 10^{16} \cdot 5$ som skrives $500\ldots000$ (16 nuller). Dette tallet har 17 siffer. **D**

Oppgave 4: Vi merker først at alle tallene ligger mellom null og en. Da er $C = A^2 < A$ og $B = E^2 < E$ hvilket utelukker A og E. Vi har at $B = 1 - 1/995$ og siden $1/995 > 1/(994 \cdot 995)$ må $B < D$. Vi har så at $C = (1 - 1/1995)^2 = 1 - 2/1995 + 1/1995^2 > 1 - 2/1995 > 1 - 1/995 = B$. **B**

Oppgave 5: Vi har at $1 + 1/n = (n+1)/n$ derfor er $1 - 1/m = (1 + 1/n)^{-1} = n/(n+1) = 1 - 1/(n+1)$ hvilket gir at $m = n+1$. **B**

Oppgave 6: Arealet av det skraverte området svarer til arealet av en sirkel med radius lik 2/3 av den store minus arealet av en sirkel med radius lik 1/3 av den store. Siden arealet er proporsjonalt med kvadratet av radien gir dette at andelen av sirkelen som er skravert er $\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$. **C**

Oppgave 7: Hvert femte tall kan deles på fem: 5, 10, 15,.... Siden $\frac{1994}{5} = 398\frac{4}{5}$ er 398 av tallene delelig med 5. Tilsvarende, siden $\frac{1994}{7} = 284\frac{6}{7}$ er 284 av tallene delelig med 7. Hvert 35. tall er delelig med både 5 og 7; siden $\frac{1994}{35} = 56\frac{34}{35}$ er 56 av tallene delelig med både 5 og 7. Vi får da at $398 - 56 = 342$ av tallene er delelig med 5 men ikke med 7, $284 - 56 = 228$ er delelig med 7 men ikke med 5, mens 56 er delelig med begge. Totalt er da $(398 - 56) + (284 - 56) + 56 = 626$ tall delelig med enten 5 eller 7, hvilket vil si at $1994 - 626 = 1368$ ikke er delelig med noen av dem. **E**

Oppgave 8: Høyden av rektangelet er 4 og diagonalen AC har lengde 7. Pytagoras setning gir da at $AB = \sqrt{7^2 - 4^2} = \sqrt{33}$. **D**

Oppgave 9: Anta at sidelengden er lik 1 og halvsirklenes radier er r. Hvis vi danner en trekant av ett hjørne og senta i de to hosliggende halvsirklen blir det en rettvinklet trekant der katetene har sidelengde $1/2$ og hypetenusen har lengde $2r$.

Pytagoras setning gir da at $r = \sqrt{2}/4$. Arealet av kvadratet er 1 og arealet av de fire halvsirklene er $2\pi r^2 = \pi/4$. Arealet av det skraverte området blir derfor $1 - \pi/4$. **A**

Oppgave 10: Vi setter inn for $2z = x + y$ og får at $\frac{x}{x-z} + \frac{y}{y-z} = \frac{2x}{2x-2z} + \frac{2y}{2y-2z} = \frac{2x}{x-y} + \frac{2y}{y-x} = \frac{2x-2y}{x-y} = 2$. **A**

Oppgave 11: Siden den mindre kjeglen er likeformet med den store, men mindre med en faktor h, må volumet av den lille være h^3 ganger volumet av hele. Siden vi har oppgitt at volumet skal være halvparten må da $h^3 = 1/2$, hvilket gir $h = 1/\sqrt[3]{2}$. **C**

Oppgave 12: Siden 1 sau = 4 katter får vi at 1 sau + 2 katter = 6 katter = 3 sekker; det gir at en sekk veier like mye som 2 katter. Vi får da at 1 mann = 4 sekker − 1 sau = 8 katter − 4 katter = 4 katter. **A**

Oppgave 13: Man kan selvsagt gange ut alle ledd, men det finnes en annen metode som på mange måter er mere interessant. Merk at dersom to av variablene byttes om vil ikke uttrykket endres. Tilsvarende kan man endre fortegn på variablene uten at dette gir noen endring: man må bytte rekkefølge på kvadratene og skifte om fortegnene innenfor parantesen, men det gir ingen endring av summen. Det eneste uttrykk av grad to som ikke endres når variablene byttes om eller fortegn endres er $a^2 + b^2 + c^2$ og konstanter ganget med dette. Vi ser at a^2 kommer 4 ganger i summen og derfor må summen bli $4(a^2 + b^2 + c^2)$. **D**

Oppgave 14: Hvis A er arealet innenfor både sirkel og kvadrat, B er arealet av området innenfor sirkelen men utenfor kvadratet og C er arealet av området innenfor kvadratet men utenfor sirkelen, så skal $B = C$. Arealet av sirkelen er $A + B$ og arealet av kvadratet er $A + C$, så sirkelen og kvadratet må ha samme areal. Dette gir at $s^2 = \pi d^2/4$ hvilket gir at $d/s = \sqrt{4/\pi} = 2/\sqrt{\pi}$. **B**

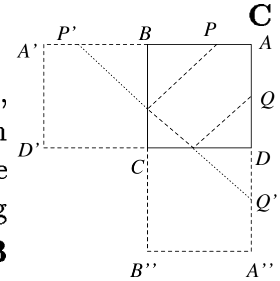
Oppgave 15: Vi har at $f(x-1)f(x+1)/f(x) = (x-1)x(x+1)(x+2)/x(x+1) = (x-1)(x+2)$ som blir lik $9 \cdot f((x-1)/3)$. **D**

Oppgave 16: Siden gjennomsnittet av de ti tallene er 20 må summen av dem være $10 \cdot 20 = 200$. Etter at ett av tallene er tatt ut og gjennomsnittet er 19 må summen være $9 \cdot 19 = 171$. Tallet som ble tatt ut må derfor ha vært $200 - 171 = 29$. **E**

Oppgave 17: Dersom $ABCD$ er et kvadrat blir $\angle APB = 90°$, men dersom vi velger et annet rektangel er vinklene i firkanten de samme mens $\angle APB$ er endret avhengig av forholdet mellom sidene i rektrangelet. Vinkelen kan derfor ikke bestemmes utifra vinklene i hjørnene alene. **E**

Oppgave 18: Anta at professoren går x kilometer hver vei på flatmark, y kilometer oppover og følgelig også y kilometer nedover på hver tur. Da bruker han $2x/4 + y/3 + y/6 = (x+y)/2$ timer på turen. Siden professoren brukte 2 timer må $x + y = 4$. Turen er da $2(x + y) = 8$ kilometer (frem og tilbake). **B**

Oppgave 19: La en Alfa koste selgeren a kroner og en Beta koste b kroner. Hvis han selger en av hver må han selv betale $a+b$ men henter inn $0.4a+0.6b$ i fortjeneste. Siden han da skulle ha 48% fortjeneste må $0.4a + 0.6b = 0.48(a + b)$. Dersom vi løser opp ligningen finner vi at den gir $b = 2a/3$. Når selgeren selger 3 Betaer for hver 2 Alfaer vil fortjenesten bli $0.4 \cdot 2a + 0.6 \cdot 3b = 2a$ pr. $2a + 3b = 4a$ i innkjøp, dvs. 50% i fortjeneste. **C**



Oppgave 20: Vi speiler kvadratet om BC og får speilbildene A', D' og P'. En tilsvarende speiling om CD gir A'', B'' og Q''. Veien fra P til Q via S og T blir nå en vei fra P' til Q''. Den korteste slike vei er en rett linje mellom P' og Q''. Siden $AP' = 5/3$ og $AQ'' = 3/2$ blir $P'Q'' = \sqrt{(5/3)^2 + (3/2)^2} = \sqrt{181}/6$. **B**

FASIT:

1:	A	11:	C
2:	B	12:	A
3:	D	13:	D
4:	B	14:	B
5:	B	15:	D
6:	C	16:	E
7:	E	17:	E
8:	D	18:	B
9:	A	19:	C
10:	A	20:	B

BRUKSANVISNING:

Denne tabellen har samme format som svartabellen i oppgavesettet. Ved å klippe den ut og klippe ut de to spaltene kan du, ved å legge dette tablået over svaret, raskt finne ut hvor mange riktige og gale svar det er.

Dersom du har mange oppgaver å rette, burde den være hendig å bruke. Jeg håper ihvertfall det. Pass bare på i tilfelle noen har skrevet noe utenfor rutene.