Abel-konkurransen 1995–96
FINALE

Oppgave 1

La S være en sirkel med sentrum C og radius r, og la P være et vilkårlig punkt forskjellig fra C. Trekk en linje l gjennom P som skjærer sirkelen i to punkter X og Y. La Z være midtpunktet på XY. Vis at punktene Z for forskjellige linjer l ligger på en sirkel. Finn sentrum og radius til denne sirkelen.

Oppgave 2

For $n \in \mathbf{N}$, vis at $\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+1} \right\rfloor$. (Uttrykket $\lfloor x \rfloor$ betegner x rundet nedover til nærmeste heltall: f.eks. er $\lfloor 1.345 \rfloor = 1$, $\lfloor 3.864 \rfloor = 3$ og $\lfloor 5 \rfloor = 5$.)

Oppgave 3

Per og Kari har n lapper hver. De skriver ned tallene fra 1 til $2n$ på lappene sine i en vilkårlig rekkefølge: ett tall på hver side av lappen. Dernest skal de legge alle lappene ut på bordet med den ene siden opp. Vis at de alltid kan legge lappene slik at alle tallene fra 1 til $2n$ vender opp nøyaktig én gang.

Oppgave 4

La $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ (dvs. at x og $f(x)$ er naturlige tall) slik at $f(f(1995)) = 95$, $f(xy) = f(x)f(y)$ og $f(x) \leq x$. Finn alle mulige verdier av $f(1995)$.