Abel-konkurransen 1995–96
FINALE — FASIT

Oppgave 1

Siden Z er midtpunktet på XY der X og Y ligger på sirkelen, vil CZ stå normalt på XY. Dette gjør PZC til en rettvinklet trekant, og da ligger Z på sirkelen med diameter PC. Denne sirkelen har sentrum lik midtpunktet til PC og diameter lik lengden til PC.

Oppgave 2

Kvadrer uttrykket innenfor nedrundingstegnene på venstresiden. Da får man $n+(n+1)+2\sqrt{n(n+1)}$. Siden $n(n+1)$ ligger mellom n^2 og $(n+1/2)^2 = n^2+n+1/4$ vil $2n+1+2n = 4n+1 < \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1+(2n+1) = 4n+2$. Dersom vi setter $\lfloor\sqrt{4n+1}\rfloor = m$ vil det si at $m^2 \leq 4n+1 < (m+1)^2$, men da vil vi også ha at $m^2 \leq 4n+1 < \left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)} < 4n+2 \leq (m+1)^2$. Dermed blir også $\left\lfloor\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right\rfloor = m$.

Oppgave 3

La Per legge opp en vilkårlig lapp; la a_1 være det tallet som vender opp og a_2 være tallet som vender ned. Da må Kari velge lappen som inneholder a_2 og legge denne med a_2 opp; la det tallet som da vender ned være a_3. Så må Per finne lappen med a_3 på og legge denne med a_3 opp; la da a_4 være tallet som vender ned. Slik kan de fortsette. Per legger lapper med a_{2i-1} opp og a_{2i} ned. Kari legger lapper med a_{2i} opp og a_{2i+1} ned.

Slik kan de fortsette inntil prosessen stopper: de får $a_m = a_j$ der $j < m$. Det vil si at den ene har lagt opp en lapp slik at a_m vender ned, men at den andre alt har benyttet sin lapp med a_m på. Vi kan ikke ha $j > 1$ fordi de begge da har benyttet sine lapper med $a_j = a_m$ på, så det tallet; vi må derfor ha $j = 1$. Siden Per begynte med å legge opp sin lapp med a_1 må det være Kari som la opp den siste lappen med $a_1 = a_m$; m er derfor et oddetall, og Kari har sluttet med å legge opp lappen med a_{m-1} opp og a_m ned. Ringen er da sluttet: Per og Kari har lagt opp lappene som inneholder tallene $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ slik at hvert av disse tallene vender opp nøyaktig én gang.

Dersom de begge har lagt ut alle sine lapper er de ferdige. Dersom de har lapper igjen kan de gjenta prosedyren igjen: Per velger en ny vilkårlig lapp, osv. Denne prosedyren kan de da gjenta til de ikke har flere lapper igjen.

Oppgave 4

Merk at $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$ og $95 = 5 \cdot 19$. Vi kan derfor skrive om likheten til $f(f(3)) \cdot f(f(5)) \cdot f(f(7)) \cdot f(f(19)) = 5 \cdot 19$. Siden $f(x) \le x$ for alle x må spesielt $f(19) \le 19$. Primfaktoren 19 kan ikke være faktor i $f(f(3))$, $f(f(5))$ eller $f(f(7))$ fordi disse alle er mindre enn 19. Derfor må 19 være faktor i $f(f(19))$. Siden $f(f(19)) \le f(19) \le 19$ og $f(f(19))$ er et multiplum av 19, må vi ha $f(f(19)) = 19$ og dermed $f(19) = 19$.

Det gjenstår da at $f(f(3)) \cdot f(f(5)) \cdot f(f(7)) = 5$. Da må 5 være primfaktor i $f(f(5))$ eller $f(f(7))$. Hvis 5 skulle vært faktor i $f(f(7))$ måtte $f(7) < 7$, men da finnes kun alternativene $f(7) = 5$ og $f(7) = 6 = 2 \cdot 3$. Hvis $f(7) = 6$, så må $f(f(7)) = f(6) = f(2) \cdot f(3)$ som ikke kan ha 5 som primfaktor. Eneste mulighet blir da at $f(7) = 5$, men da må $f(5) = 5$ ellers ville ikke $f(f(7))$ hatt 5 som faktor. Dette ville dog gi at $f(f(5)) \cdot f(f(7)) = 25$, hvilket blir for mye. Vi kan derfor konkludere med at $f(f(7))$ ikke har 5 som primfaktor og videre at vi da må ha $f(f(5)) = f(5) = 5$.

Vi har så igjen $f(f(3)) \cdot f(f(7)) = 1$ som gir $f(f(3)) = f(f(7)) = 1$. For at $f(f(3)) = 1$ må enten $f(3) = 1$, eller $f(3) = 2$ og $f(2) = 1$. Dersom $f(3) = 1$ og antar $f(2) = 1$ kan $f(7)$ være lik 1, 2, 3, 4 eller 6; dette gir $f(3) \cdot f(7) = 1$, 2, 3, 4 eller 6. Dersom $f(3) = 2$ og $f(2) = 1$ kan $f(7)$ være 1, 2 eller 4; dette gir $f(3) \cdot f(7) = 2$, 4 eller 8.

Tar vi med $f(5) = 5$ og $f(19) = 19$ finner vi at $f(1995)$ kan ta verdiene 95, 190, 285, 380, 570 eller 760.