Telenor

# Abel-konkurransen 1995–96

## Fasit til første runde

**Oppgave 1:** Gjennomsnittet av $-3$ og $x$ er $(x-3)/2 = 2$, hvilket gir $x = 7$. **E**

**Oppgave 2:** Siden arealet er 36 må sidelengdene være 6. Dette gir at sirkelen har radius 3 og dermed areal $9\pi$. **B**

**Oppgave 3:** Siden $p(1) = 1^3 + a \cdot 1 + 1 = a + 2$ skal være lik 1, må $a = -1$. Dette gir $p(2) = 2^3 - 2 + 1 = 7$. **E**

**Oppgave 4:** To av eskene inneholder både blyanter og penner, tre av eskene inneholder bare blyanter (ikke penner) og to av eskene inneholder bare penner. Det gjenstår da tre esker som må være tomme. **D**

**Oppgave 5:** Del firkanten opp i en firkantet bit med sidelengder 6 og 8 og en rettvinklet trekant med hypetenus 10 og katet 8. Lengden av den siste siden i den store firkanten finnes ved hjelp av Pyagoras setning å være $6 + 6 = 12$. Arealet av hele firkanten blir da $8 \cdot (6 + 12)/2 = 72$. **E**

**Oppgave 6:** Først kjøpes $a$ epler for tilsammen $ab$ kroner og så kjøpes $b$ epler for ytterligere $ab$ kroner. Man har da betalt $2ab$ kroner for $a + b$ epler hvilket gir en pris på $2ab/(a + b)$ kroner pr. eple. **C**

**Oppgave 7:** Første siffer (100-sifferet) kan velges på 9 forskjellige måter og andre siffer (10-erne) på 10 forskjellige måter. Tredje siffer må være lik det første. Dette gir $9 \cdot 10 = 90$ forskjellige palindromiske tall. **C**

**Oppgave 8:** $C$ kan velges på to forskjellige måter slik at $AC = AB$, på to måter slik at $BC = AB$ og på én måte slik at $AC = BC$. Ingen av disse tilfellene sammenfaller: trekanten kan ikke bli likesidet. Derfor utgjør dette fem forskjellige tilfeller. **E**

**Oppgave 9:** Pytagoras setning gir $a^2 + (a + b)^2 = (a + 9b)^2$. Ved å gange ut og dele med $b^2$ på begge sider, fåes en annengradsligning i $a/b$ som har 20 som eneste positive løsning. **D**

**Oppgave 10:** La $n$ være antall gardister. Da er $n - 1$ delelig med 2, 3, 4, 5 og 6, mens $n$ er delelig med 7. Et tall $n - 1$ er delelig med 2, 3, 4, 5 og 6 hvis og bare hvis det er delelig med deres minste felles multiplum: 60. Dette gir mulighetene $n - 1 = 60$, 120, 180, etc. Den minste slike $n$ som er delelig med 7 er da 301. **A**

**Oppgave 11:** Pytagoras gir $c^2 = a^2 + b^2 = 16$, men vi har også at $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 19$. Dette gir $2ab = 3$ og dermed areal lik $ab/2 = 3/4$. **A**

**Oppgave 12:** Vi har at $(x + 1/x)^2 = x^2 + 2 + 1/x^2 = 9$ som gir $x^2 + 1/x^2 = 7$. Videre blir da $(x^2 + 1/x^2)^2 = x^4 + 2 + 1/x^4 = 49$ som gir $x^4 + 1/x^4 = 47$. **C**

**Oppgave 13:** Sidene $BH$ og $GH$ er begge $1/2$. Arealet av trekantene $ABH$ og $AGH$ blir derfor $1/4$ hver: $1/2$ tilsammen. Arealet av hele figuren blir da arealet av hver av firkantene minus den overlappende biten: $3/2$. **C**

**Oppgave 14:** Vi har at $v = \angle ECD - \angle EBC$. Dette kan vises ved å sette inn at $v + \angle EBC + (180° - \angle ECD) = 180°$. Tilsvarende er $\angle CAB = \angle ACD - \angle ABC = 2(\angle ECD - \angle EBC) = 2v$. **C**

**Oppgave 15:** La $s$ være strekningen han skal gå. Hvis han går med 15 km/t bruker han $s/15$ timer, mens med 10 km/t bruker han $s/10$ timer. Differansen skal være to timer: $s/10 - s/15 = 2$ hvilket gir $s = 60$ og at tiden brukt er $s/10 = 6$ timer eller $s/15 = 4$ timer. For å komme frem midt imellom de to klokkeslettene må han gå med hastigheten $v$ der $s/v = 5$, hvilket gir $v = s/5 = 12$ km/t. **A**

**Oppgave 16:** La $P$ være bunnpunktet der hjulet treffer bakken, $Q$ topppunktet på sirkelen,$R$ hjørnet av fortauskanten og $S$ punktet der fortauet og bakken møtes. Da er $RS = a$, $RP = b$ og $PQ = 2r$ der $r$ er sirkelens radius. Vi har at de to trekantene $PRQ$ og $SRP$ er likeformede og derfor at $PR/RS = PQ/PR$. Dette gir at $2r/b = b/a$ som gir $r = b^2/2a$. **D**

**Oppgave 17:** Vi har at $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. De naturlige tall som deler 720 er da $2^a 3^b 5^c$ der $a = 0, 1, 2, 3, 4$, $b = 0, 1, 2$ og $c = 0, 1$. Dette gir $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ forskjellige muligheter. **D**

**Oppgave 18:** Antall slike tall er lik antall måter å velge ut 7 av de 9 sifrene. Dette er igjen det samme som antall mulige måter ta bort to av de 9 sifrene. Det første sifferet som man tar bort kan man velge på 9 forskjellige måter. Det andre sifferet kan man velge på 8 forskjellige måter. Dette gir $9 \cdot 8 = 72$ muligheter, men da er hvert par tatt med to ganger: de to rekkefølgene de to tallene kan velges i. Vi må derfor dele med to: $9 \cdot 8/2 = 36$. **E**

**Oppgave 19:** La $x = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$. Da blir $x^2 = 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})} = 6 + 2\sqrt{1} = 8$. Det gir at $x = 2\sqrt{2}$. Man kan også vise at $\sqrt{3 \pm 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \pm 1$. **D**

**Oppgave 20:** La $B'$ være punktet slik at $BB'$ står normalt på veien og $AB'$ er parallel med veien. Da blir $BB' = 60$ og $AB'^2 = 80^2 - 60^2$. Hvis vi tar bor veien blir den nye avstanden mellom $B$ og $B'$ 50 meter. Den korteste veien mellom $A$ og $B$ blir da en rett linje som vil ha lengde $\sqrt{50^2 + AB'^2} = 10\sqrt{53}$ meter. I tillegg kommer de 10 meterne som Napoleon må gå for å krysse veien. **C**